66 F3171

QA1
M88
v.31

Über die Darstellung der Zahlen durch die binären kubischen Formen von negativer Diskriminante.

Von

Boris Delaunay in Leningrad.

Einleitung.

Die arithmetische Theorie der binären Formen höheren Grades ist insofern als eine unvollständige zu bezeichnen, als die fundamentale Frage nach der Darstellung einer gegebenen Zahl durch eine solche Form einstweilen völlig unaufgeklärt bleibt. — Zwar gibt es ein wichtiges von Axel Thue herrührendes Theorem, welches besagt, daß die Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch eine binäre Form von höherem als dem zweiten Grade immer eine endliche ist. Aber dieses Theorem kann in Anbetracht der Forderungen, welche an eine arithmetische Theorie immer gestellt werden, nur als der erste Schritt angesehen werden, der zu weiteren Fragestellungen Anlaß gibt.

Die erste sich so darbietende Frage bezieht sich auf die wirkliche Bestimmung der genauen oberen Grenze der als endlich erwiesenen Darstellungszahl in jedem gegebenen Falle.

Die zweite Frage betrifft die Angabe eines endlichen (und wenn möglich praktisch brauchbaren) Verfahrens, welches alle vorhandenen Darstellungen zu finden ermöglicht und, wenn solche nicht existieren, deren Nichtexistenz festzustellen gestattet.

Bei der Beschäftigung mit diesen Fragen ist es mir im Jahre 1919 gelungen, eine besondere Methode zu ersinnen, welche wenigstens für die binären kubischen Formen von negativen Diskriminanten die vollständige Antwort auf die erste aufgeworfene Frage gibt. Es ergab sich nämlich als Hauptergebnis meiner Untersuchungen das folgende bemerkenswerte

Theorem: *Die Anzahl der Darstellungen der Zahl eins durch eine beliebige kubische Form von negativer Diskriminante kann niemals die Grenze* 5 *übersteigen, und zwar gibt es Formen, die gerade diese Darstellungszahl zulassen.*

Für eine beliebige Zahl läßt sich aber die Frage nach der Darstellungszahl immer auf die vorige einfachere Frage zurückführen.

Was nun die zweite Frage betrifft, so gibt zwar meine Methode auch ein Verfahren, welches auf die einzelnen Beispiele angewandt immer die Bestimmung *aller* vorhandenen Darstellungen ermöglichte oder deren Nichtvorhandensein zeigte, aber es ist mir bis jetzt nicht gelungen, den vollständigen Beweis, daß dies immer so wird, zu erbringen. Wir werden hier der Kürze wegen auf die Auseinandersetzung dieses Verfahrens verzichten und nur am Ende der Abhandlung im Anhange drei Tabellen geben, welche die durch dieses Verfahren erzielten rechnerischen Resultate enthalten.

Aber auch in dieser unvollendeten Form scheinen diese Untersuchungen einiges Interesse darzubieten, und darum habe ich mich entschlossen, sie in dieser Abhandlung zu veröffentlichen[1]).

1. Reduktion des Problems auf die Aufsuchung gewisser Einheiten.

Das Problem, alle ganzzahligen Lösungen X, Y der Gleichung

$$(1) \qquad AX^3 + BX^2Y + CXY^2 + EY^3 = \sigma$$

zu finden, wo A, B, C, E, σ gegebene ganze rationale Zahlen sind, kann auf die andere einfachere Frage zurückgeführt werden, alle ganzzahligen Lösungen X, Y einer gewissen Anzahl von Gleichungen der Form

$$(2) \qquad AX^3 + BX^2Y + CXY^2 + EY^3 = 1$$

zu finden. Das ist das bekannte Resultat, das Lagrange 1770 angegeben hat («Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indeterminées en nombres entiers», Mémoires de Berlin tome XXIV, 1770). Wir werden die Frage nach der Anzahl der Lösungen für die Gleichung (2) untersuchen, hierdurch wird also auch dieselbe Frage für die Gleichung (1) erledigt. Die Gleichung (2) hat entweder keine Lösungen, dann ist die Anzahl ihrer Lösungen gleich Null, oder sie hat Lösungen, dann kann man aber bekanntlich zu einer äquivalenten Form übergehen, bei welcher der letzte Koeffizient gleich der darstellbaren Zahl, also gleich 1 ist. Ist $(q, -q, n, 1)$ eine solche Form[2]), so kommt alles auf die Frage nach der Anzahl der Lösungen einer Gleichung von der Form

---

[1]) Der Hauptsatz von § 22 ist mit kurzen Andeutungen des Beweises in der C. R., August 1920, erschienen, der vollständige Beweis dieses Theorems ist in meiner russischen Abhandlung in den Bulletins de l'Académie des Sciences de Russie für das Jahr 1922 enthalten.

[2]) Wir sagen hier nicht, daß, wenn die Form (A, B, C, E) gegeben ist, wir die Form $(q, -p, n, 1)$ finden können, sondern nur, daß, wenn die Gleichung (2) eine Lösung hat, eine solche Form $(q, -p, n, 1)$ existiert.

(3) $$qX^3 - pX^2Y + nXY^2 + Y^3 = 1$$

an. Aus der Identität

$$X^3q - X^2Yp + XY^2n + Y^3 = (X\varrho + Y)(X\varrho' + Y)(X\varrho'' + Y),$$

wo $\varrho, \varrho', \varrho''$ die drei Wurzeln der kubischen Gleichung $\varrho^3 = n\varrho^2 + p\varrho + q$ sind, sehen wir, daß einer jeden Lösung der Gleichung (3) in dem Ringe $[\varrho^2, \varrho, 1]$, welchen wir der Kürze wegen auch mit $O(\varrho)$ bezeichnen werden, eine positive Einheit (d. h. eine solche mit der Norm $+1$) von der Form $X\varrho + Y$ entspricht; und umgekehrt entspricht einer jeden solchen „binomen" positiven Einheit des Ringes $O(\varrho)$ eine Lösung der Gleichung (3). Nehmen wir jetzt an, daß die Diskriminante $D = n^2p^2 - 18npq + 4p^3 - 4n^3q - 27q^2$ der Gleichung eine negative Zahl ist, d. h. eine Wurzel ϱ reell ist und die beiden anderen ϱ', ϱ'' konjugiert komplex sind, so bekommt man, nach dem Theorem von Dirichlet, alle positiven Einheiten des Ringes $O(\varrho)$, indem man eine gewisse positive Fundamentaleinheit des Ringes und die ihr inverse in alle Potenzen mit ganzen rationalen positiven Exponenten m erhebt. Diejenige der beiden positiven Fundamentaleinheiten ε_0 und $\eta_0 = \varepsilon_0^{-1}$, welche den Ungleichungen $0 < \varepsilon_0 < 1$ genügt, werden wir *direkt*, und die andere η_0, welche der Ungleichung $1 < \eta_0$ genügt, *invers* nennen. Sei $\varepsilon_0 = a\varrho^2 + b\varrho + c$ und $\eta_0 = a'\varrho^2 + b'\varrho + c'$, dann reduziert sich unsere ganze Frage nach der Anzahl der Darstellungen auf die Frage nach der Anzahl der ganzen rationalen positiven Exponenten m, für welche $(a\varrho^2 + b\varrho + c)^m$ oder $(a'\varrho^2 + b'\varrho + c')^m$ binom ist, d. h. das Glied mit ϱ^2 nicht enthält.

Es sind Methoden bekannt, welche zwar ziemlich umständlich sind, aber dennoch die Fundamentaleinheit eines beliebigen kubischen Ringes zu berechnen erlauben. Solche Methoden wurden von Zolotareff, Charve, Minkowski, Voronoï und Berwick angegeben. Hier geben wir eine kleine Tabelle der direkten positiven Fundamentaleinheiten für die 48 kubischen Ringe mit den dem absoluten Betrage nach kleinsten negativen Diskriminanten:

$-D$		$-D$	
23	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 + 1$ $\Delta=1$	104	$\varepsilon^3 = \varepsilon^2 - 5\varepsilon + 1$ $\Delta=2$ $\varepsilon = -\varrho^2 + \varrho + 1$ $\varrho^3 = \varrho + 2$
31	$\varepsilon^3 = -\varepsilon + 1$ $\Delta=1$		
44	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon + 1$ $\Delta=1$	107	$\varepsilon^3 = 2\varepsilon - 4\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
59	$\varepsilon^3 = -2\varepsilon + 1$ $\Delta=1$	108	$\varepsilon^3 = -3\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
76	$\varepsilon^3 = \varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1$ $\Delta=1$	116	$\varepsilon^3 = -3\varepsilon^2 - 5\varepsilon + 1$ $\Delta=2$ $\varepsilon = \varrho^2 - \varrho - 1$ $\varrho^3 = \varrho^2 + 2$
83	$\varepsilon^3 = -2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1$ $\Delta=1$		
87	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1$ $\Delta=1$		

$-D$		$-D$	
135	$\varepsilon^3 = -3\varepsilon + 1$ $\Delta=1$	247	$\varepsilon^3 = -3\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
139	$\varepsilon^3 = 4\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 1$ $\Delta=1$	255	$\varepsilon^3 = 5\varepsilon^2 - 8\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
140	$\varepsilon^3 = 3\varepsilon^2 - 5\varepsilon + 1$ $\Delta=1$	268	$\varepsilon^3 = 7\varepsilon^2 - 13\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
152	$\varepsilon^3 = 5\varepsilon^2 - 9\varepsilon + 1$ $\Delta=2$ $\varepsilon = -\varrho^2 + \varrho + 3$ $\varrho^3 = \varrho^2 + 2\varrho + 2$	279	$\varepsilon^3 = 2\varepsilon^2 - 5\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
		283	$\varepsilon^3 = -4\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
		300	$\varepsilon^3 = -7\varepsilon^2 - 23\varepsilon + 1$ $\Delta=9$ $\varepsilon = -\varrho^2 + 5\varrho - 5$ $\varrho^3 = 4\varrho^2 - 2\varrho + 2$
172	$\varepsilon^3 = 3\varepsilon^2 - 7\varepsilon + 1$ $\Delta=2$ $\varepsilon = -\varrho^2 + 2\varrho + 1$ $\varrho^3 = 2\varrho^2 + 2$	304	$\varepsilon^3 = -5\varepsilon^2 - 7\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
175	$\varepsilon^3 = -2\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1$ $\Delta=1$	307	$\varepsilon^3 = -5\varepsilon^2 - 19\varepsilon + 1$ $\Delta=8$ $\varepsilon = 2\varrho - 1$ $\varrho^3 = -\varrho^2 - 3\varrho + 2$
176	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1$ $\Delta=1$		
199	$\varepsilon^3 = \varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1$ $\Delta=1$		
200	$\varepsilon^3 = -7\varepsilon^2 - 13\varepsilon + 1$ $\Delta=2$ $\varepsilon = \varrho^2 - \varrho - 1$ $\varrho^3 = 2\varrho^2 - 3\varrho + 4$	324	$\varepsilon^3 = -15\varepsilon^2 - 57\varepsilon + 1$ $\Delta=6$ $\varepsilon = \varrho^2 + \varrho - 7$ $\varrho^3 = 3\varrho + 4$
204	$\varepsilon^3 = 5\varepsilon^2 - 11\varepsilon + 1$ $\Delta=3$ $\varepsilon = -\varrho^2 + \varrho + 1$ $\varrho^3 = \varrho^2 - \varrho + 3$	327	$\varepsilon^3 = -9\varepsilon + 1$ $\Delta=3$ $\varepsilon = -\varrho^2 + 4\varrho - 2$ $\varrho^3 = 4\varrho^2 - 3\varrho + 3$
211	$\varepsilon^3 = 6\varepsilon^2 - 10\varepsilon + 1$ $\Delta=1$	331	$\varepsilon^3 = -2\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
212	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - 15\varepsilon + 1$ $\Delta=8$ $\varepsilon = 2\varrho - 1$ $\varrho^3 = \varrho^2 - 4\varrho + 2$	332	$\varepsilon^3 = 7\varepsilon^2 - 23\varepsilon + 1$ $\Delta=8$ $\varepsilon = -2\varrho + 3$ $\varrho^3 = \varrho^2 - 2\varrho + 4$
216	$\varepsilon^3 = 9\varepsilon^2 - 21\varepsilon + 1$ $\Delta=2$ $\varepsilon = -\varrho^2 - \varrho + 1$ $\varrho^3 = -3\varrho + 2$	335	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
		339	$\varepsilon^3 = 11\varepsilon^2 - 35\varepsilon + 1$ $\Delta=8$ $\varepsilon = -2\varrho + 5$ $\varrho^2 = 2\varrho^2 + 3$
231	$\varepsilon^3 = -4\varepsilon^2 - 5\varepsilon + 1$ $\Delta=1$		
236	$\varepsilon^3 = 3\varepsilon^2 - 11\varepsilon + 1$ $\Delta=4$ $\varepsilon = \varrho^2 - 3\varrho + 1$ $\varrho^3 = 2\varrho^2 + \varrho + 2$	351	$\varepsilon^3 = 3\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
		356	$\varepsilon^3 = 11\varepsilon^2 - 43\varepsilon + 1$ $\Delta=16$ $\varepsilon = -2\varrho^2 - 2\varrho + 13$ $\varrho^3 = 7\varrho - 8$
239	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - 8\varepsilon + 1$ $\Delta=3$ $\varepsilon = \varrho^2 - \varrho - 1$ $\varrho^3 = \varrho + 3$	364	$\varepsilon^3 = 3\varepsilon^2 - 19\varepsilon + 1$ $\Delta=8$ $\varepsilon = -2\varrho + 1$ $\varrho^3 = -4\varrho + 2$
243	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - 12\varepsilon + 1$ $\Delta=1$		
244	$\varepsilon^3 = -5\varepsilon^2 - 27\varepsilon + 1$ $\Delta=16$ $\varepsilon = -2\varrho^2 + 10\varrho - 7$ $\varrho^3 = 5\varrho^2 - 4\varrho + 2$	367	$\varepsilon^3 = 4\varepsilon^2 - 7\varepsilon + 1$ $\Delta=1$
		368	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - 7\varepsilon + 1$ $\Delta=2$

Für jede Diskriminante ist die kubische Gleichung, welcher die direkte positive Fundamentaleinheit ε des betreffenden Ringes genügt, und der Relativindex Δ (d. h. $D_\varepsilon = \Delta^2 \cdot D$) dieser Einheit gegeben. Alle diese Ringe, außer dem letzten (mit der Diskriminante -368), haben eine Potenzbasis von der Form $[\varrho^2, \varrho, 1]$, d. h. es gibt in jedem von ihnen eine Zahl ϱ, dessen Diskriminante die Diskriminante des Ringes selbst ist. In vielen Fällen ist ε selbst eine solche Zahl ϱ, nämlich immer wenn $\Delta = 1$ ist; wenn aber $\Delta > 1$ ist, so ist ε keine solche Zahl, in diesen Fällen gebe ich noch die kubische Gleichung, welcher eine solche Zahl ϱ genügt, und den Ausdruck von ε in ϱ. Diese Tabelle habe ich nach der Methode von Voronoï berechnet.

2. Über die inversen Lösungen.

In diesem Paragraphen werden wir die Potenzen der inversen Einheit η_0 untersuchen. Der Kürze wegen werden wir uns hier der bekannten geometrischen Ausdrucksweise bedienen. Ist $\omega^3 = n\omega^2 + p\omega + q$ eine kubische Gleichung mit negativer Diskriminante, bedeuten ω ihre reelle und $\omega' = \xi + i\eta$, $\omega'' = \xi - i\eta$ ihre zwei konjugiert komplexen Wurzeln, so werden wir diese Gleichung (bzw. die Zahl ω) durch den Punkt $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \omega$ in rechtwinkligen Koordinaten (x, y, z) darstellen; dann ist in bekannter Weise der Ring $O(\varrho)$ durch ein parallelepipedisches System von Punkten repräsentiert, welches mit Hilfe der vier Punkte $0, 1, \varrho, \varrho^2$ gebildet ist. Alle positiven Einheiten liegen auf der Rotationsfläche $(x^2 + y^2)z = 1$. Alle binomen Zahlen $X\varrho + Y$ des Ringes liegen auf einer Ebene, welche die Gleichung $x + H \cdot y + z = 0$, hat wo

$$H = \frac{1}{\sqrt{-D}}[2(3p + n^2)\varrho + np + 9q] \quad \text{und} \quad D$$

die Determinante von ϱ ist. Wie leicht zu zeigen ist, hat die Einheitsfläche mit der „binomen“ Ebene keine Punkte, deren $z > \sqrt[3]{H^2+1}$ ist. Es können also in der Reihe η_0^m binome Einheiten nur für solche m vorhanden sein, welche kleiner als die Zahl $l = \frac{\log \sqrt[3]{H^2+1}}{\log \eta_0}$ sind. Nachdem die Fundamentaleinheit ε_0 berechnet ist, können wir die Zahl l finden, dann alle η_0^m, für welche $m < l$ ist, berechnen, und so alle inversen Lösungen finden, wenn es überhaupt solche gibt.

Für die Erforschung der direkten Lösungen geben uns die geometrischen Betrachtungen nichts, weil die Einheitsfläche als Durchschnitt mit der „binomen“ Ebene eine unendliche Linie hat, und man sieht gar nicht den Grund, warum nicht unendlich viele Punkte des parallelepipedischen Systems $O(\varrho)$ genau auf diese Linie fallen könnten. Der Grund hierfür ist lediglich arithmetischer Natur.

3. Über die Lösungen von äquivalenten ganzen Formen.

Wir werden fast ausschließlich kubische Formen von der Gestalt $(q, -p, n, 1)$ betrachten, d. h. solche, bei welchen der vierte Koeffizient gleich 1 ist; solche Formen werden wir „ganz“ nennen. Unter dem Ausdrucke „Lösung der Form“ oder „Lösung der Gleichung“ werden wir der Kürze wegen die Lösung XY der Gleichung $(A, B, C, E) = 1$ oder $(q, -p, n, 1) = 1$, d. h. die Zahlen X, Y, für welche die Form den Wert 1 liefert, verstehen. Wenn es sich aber um die Lösung einer ganzen Form handelt, was bei uns fast ausschließlich der Fall sein wird, werden wir die zugehörige Potenz der Fundamentaleinheit, welche binom ist, also eine Lösung gibt, auch kurz „Lösung“ nennen.

Seien $(q, -p, n, 1)$ und $(\overline{q}, -\overline{p}, \overline{n}, 1)$ zwei äquivalente ganze Formen und sei $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine Substitution, die die erste Form in die zweite überführt. Dann ist β, δ eine Lösung der ersten Form, d. h. $q\beta^3 - p\beta^2\delta + n\beta\delta^2 + \delta^3 = 1$, und α, γ zwei solche Zahlen, daß $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ ist. Es ist leicht zu sehen, daß, wenn man andere solche Zahlen α', γ' nimmt, eine Form $(\overline{q}', -\overline{p}', \overline{n}' 1)$ entstehen wird, welche eine der Form $(\overline{q}, -\overline{p}, \overline{n}, 1)$ parallele ganze Form ist, d. h. aus ihr durch die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ P & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wird. Wir werden sagen, daß die ganze Form $(\overline{q}, -\overline{p}, \overline{n}, 1)$ durch die Lösung β, δ der ganzen Form $(q, -p, n, 1)$ aus dieser letzten erhalten wird.

Seien $X = \beta_1, Y = \delta_1$; $X = \beta_2, Y = \delta_2$; ..., ...; $X = \beta_i, Y = \delta_i$; ..., ... die konsekutiven Lösungen der ganzen Form $(q, -p, n, 1)$, welche den Potenzen $\varepsilon_0^{m_1}, \varepsilon_0^{m_2}, \ldots, \varepsilon_0^{m_i}, \ldots$ der direkten positiven Fundamentaleinheit entsprechen, und sei β_k, δ_k eine von diesen Lösungen. Dann hat die äquivalente ganze Form $(\overline{q}, -\overline{p}, \overline{n}, 1) = (q, -p, n, 1)_{\left(\begin{smallmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{smallmatrix}\right)}$ die Lösungen $\overline{X} = \delta_k\beta_i - \beta_k\delta_i$, $\overline{Y} = -\gamma_k\beta_i + \alpha_k\delta_i$ (wo $i = 1, 2, \ldots$ ist). Wenn ϱ und $\overline{\varrho}$ die Wurzeln der Gleichungen $\varrho^3 = n\varrho^2 + p\varrho + q$ und $\overline{\varrho}^3 = \overline{n}\overline{\varrho}^2 + \overline{p}\overline{\varrho} + \overline{q}$ sind, so haben wir $\overline{\varrho} = \frac{\alpha_k\varrho + \gamma_k}{\beta_k\varrho + \delta_k}$, es werden also die Lösungen der zweiten Form

$$(\delta_k\beta_i - \beta_k\delta_i)\,\overline{\varrho} + (-\gamma_k\beta_i + \alpha_k\delta_i) = \frac{(\alpha_k\delta_k - \beta_k\gamma_k)(\beta_i\varrho + \delta_i)}{\beta_k\varrho + \delta_k} = \frac{\beta_i\varrho + \delta_i}{\beta_k\varrho + \delta_k}$$

sein. Wir erhalten also das

Theorem. *Wenn man eine ganze Form in eine neue äquivalente ganze Form mittels der Lösung $\varepsilon_0^{m_k}$ der ersten ganzen Form transformiert, so bekommt man die Lösungen der zweiten Form aus den Lösungen $\varepsilon_0^{m_1}, \varepsilon_0^{m_2}, \ldots, \varepsilon_0^{m_i}, \ldots$ der ersten Form, indem man sie alle durch $\varepsilon_0^{m_k}$ dividiert, d. h. $\varepsilon_0^{m_1 - m_k}, \varepsilon_0^{m_2 - m_k}, \ldots$ bildet.*

4. Zurückführung auf eine äquivalente ganze Form, welche keine inversen Lösungen hat.

Durch Anwendung des vorstehenden Theorems ist es möglich, jede gegebene ganze Form in eine solche äquivalente ganze Form zu transformieren, welche keine inversen Lösungen mehr hat. Es genügt dafür die Fundamentaleinheit ε_0 zu berechnen, dann, nach der Vorschrift des § 2, die größte inverse Lösung $\varepsilon_0^{m_1}$ zu finden und durch diese Lösung die gegebene Form zu transformieren.

5. Über die Potenzen einer binomen Einheit.

Theorem. *Keine Potenz einer Einheit von der Form* $b\varrho + c$, *wenn* $b \neq \pm 1$ *ist, kann eine binome Einheit sein*, d. h. wir werden zeigen, daß beim Potenzieren einer Einheit von der Form $b\varrho + c$, wo $b \neq \pm 1$ ist, solche Einheiten $M\varrho^2 + P\varrho + Q$ entstehen, bei welchen $M \neq 0$ ist. In der Tat: wenn $(b\varrho + c)^m \quad M = 0$ gibt, so bekommen wir die Gleichung:

$$\frac{m(m-1)}{1\cdot 2} c^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} b c^{m-3} n + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} b^2 c^{m-4}(p + n^2) + \ldots = 0.$$

$b\varrho + c$ ist eine Einheit, die Zahlen b und c sind deshalb relativ prim. Nehmen wir erstens an, daß b einen Primteiler π hat, welcher größer als 3 ist, und sei $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ genau durch die Potenz π^k teilbar. Wir werden in jedem Binomialkoeffizienten der folgenden Glieder im Zähler die zwei ersten Faktoren, d. h. $m(m-1)$, und im Nenner die zwei letzten behalten und alle anderen Faktoren des Nenners mit den anderen Faktoren des Zählers kürzen, was man immer machen kann, weil $\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-t+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot t}$ für $0 < n$ und $0 < t < n$ eine ganze Zahl ist. Das erste Glied ist genau durch π^k teilbar, und in den anderen ist die Potenz von π, welche dadurch verloren geht, daß π in den beiden behaltenen Faktoren des Nenners enthalten sein kann, kleiner als diejenige, welche aus der Potenz von b hinzukommt. Denn schon für $\pi = 5$ haben wir $\pi > 3$, $\pi^2 > 4$, $\pi^3 > 5$ usw.; alle Glieder sind also wenigstens durch π^{k+1} teilbar, und das erste nur durch π^k, die Gleichung ist also unmöglich. Es bleibt nur der Fall übrig, wo b nur aus den Faktoren 2 und 3 besteht. In dem Falle, wo b durch 3^2 teilbar ist und in $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ genau 3^k aufgeht, sind die folgenden Glieder wenigstens durch 3^{k+1} teilbar, weil $3^2 > 3$, $3^4 > 4$, $3^6 > 5$ usw. Wenn b durch 2 teilbar ist und in $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ genau 2^k aufgeht, so ist

$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot b\cdot c^{m-3}\cdot n$ und $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot b^2\cdot c^{m-4}\cdot(p+n^2)$ wenigstens durch 2^{k+1} teilbar, weil eine der Zahlen $m-2$ oder $m-3$ gewiß gerade ist, alle folgenden Glieder sind auch wenigstens durch 2^{k+1} teilbar, weil $2^3>5$, $2^4>6$ usw. Es bleibt nur noch der Fall $|b|=3$; in diesem Falle bekommen wir aus $c^3+nc^2b-pcb^2+qb^3=1$, daß $c^3\equiv c\equiv 1 \pmod 3$ ist, also $c=3\cdot\gamma+1$; indem wir dieses c und $b=\pm 3$ substituieren, erhalten wir $n\equiv 0 \pmod 3$. Wir sehen demnach, daß wenn $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ genau durch 3^k teilbar ist, $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot b\cdot c^{m-3}\cdot n$ gewiß durch 3^{k+1} teilbar ist, und die folgenden Glieder sind auch durch 3^{k+1} teilbar, weil $3^2>4$, $3^3>5$, ... usw.

Bemerkung. In dem Falle aber, wenn $b=\pm 1$ ist, kann eine Potenz einer binomen Einheit sehr wohl binom sein, wir haben dazu viele Beispiele.

6. Algorithmus der Erhöhung.

Wir wenden uns jetzt zur Darstellung eines eigentümlichen Verfahrens, welches wir Algorithmus der Erhöhung nennen. Seien $\varepsilon_0^{m_i}=P_i\varrho+Q_i$ alle Lösungen der Gleichung $(q,-p,n,1)=1$, und nehmen wir an, daß wir nicht einmal wissen, ob ihre Zahl endlich ist (in der ganzen Untersuchung werden wir von dem Thueschen Satz über die Endlichkeit der Anzahl der Lösungen keinen Gebrauch machen). Wenn wir die beiden Gleichungen $\varepsilon_0'^{m_i}=P_i\varrho'+Q_i$ und $\varepsilon_0''^{m_i}=P_i\varrho''+Q_i$ für die konjugierten Wurzeln ϱ' und ϱ'' hinschreiben und sie subtrahieren, so bekommen wir $\varepsilon_0'^{m_i}-\varepsilon_0''^{m_i}=P_i(\varrho'-\varrho'')$, woraus wir sehen, daß die P_i aller Lösungen durch die Zahl $\frac{\varepsilon_0'-\varepsilon_0'}{\varrho'-\varrho''}=-a\varrho+b+an$ teilbar sind; wir haben

$$P_i=(-a\varrho+b+an)\cdot(\varepsilon_0'^{m_i-1}+\varepsilon_0'^{m_i-2}\cdot\varepsilon_0''+\ldots+\varepsilon_0''^{m_i-1})$$

oder, weil der zweite Faktor der rechten Seite eine ganze symmetrische Funktion mit ganzen rationalen Koeffizienten von ϱ', ϱ'' ist,

$$P_i=(-a\varrho+b+an)\cdot(A_i\varrho^2+B_i\varrho+C_i),$$

wo die Zahlen A_i, B_i, C_i ganz und rational sind. Wir haben

$$A_ib-B_ia=0,\qquad -A_iap+B_i(b+an)-C_ia=0,$$
$$-A_iaq+(b+an)C_i=P_i,$$

woraus sich

$$A_i=\frac{a^2P_i}{N(-a\varrho+b+an)},\quad B_i=\frac{abP_i}{N(-a\varrho+b+an)},\quad C_i=\frac{(b^2+abn+a^2p)P_i}{N(-a\varrho+b+an)}$$

ergibt. Aber der größte gemeinsame Teiler $(a^2, ab, b^2+abn+a^2p)$ ist

gleich $(a, b)^2$; wenn wir also $(a, b) = \delta$, d. h. $a = a_1\delta$, $b = b_1\delta$ setzen, so sind die P_i aller Lösungen durch $\varkappa$ teilbar, wo $\varkappa = |\delta \cdot N(-a_1\varrho + b_1 + a_1 n)|$. Nehmen wir an, daß die positive ganze rationale Zahl $\varkappa \neq 1$ ist, so erkennen wir, daß alle Lösungen die Form $\overline{P}_i\bar{\varrho} + Q_i$, wo $\bar{\varrho} = \varkappa\varrho$ und $\overline{P}_i = \frac{P_i}{\varkappa}$ ist, haben müssen; sie liegen also in dem „vielfachen" Ringe $O(\bar{\varrho}) = O(\varkappa\varrho)$. Die Fundamentaleinheit des Ringes $O(\bar{\varrho})$ ist die erste Potenz ε_0^{μ} der Fundamentaleinheit ε_0 des Ringes $O(\varrho)$, welche in $O(\bar{\varrho})$ liegt, d. h. bei welcher die Koeffizienten von ϱ^2 und ϱ durch $\varkappa^2$ und $\varkappa$ teilbar sind. Wenn $\varkappa$ zu dem Index von ϱ in Ω_ϱ relativ prim ist, so ist μ ein Teiler von $\varphi(\varkappa^2)$, wo φ die Eulersche Funktion in Ω_ϱ ist, weil nach dem Fermatschen Lemma in Ω_ϱ $\varepsilon_0^{\varphi(\varkappa^2)} \equiv 1 \pmod{\varkappa^2}$, d. h. $\varepsilon_0^{\varphi(\varkappa^2)}$ von der Form $\varkappa^2(t_1\varrho^2 + t_2\varrho + t_3) + 1$ ist. Hierbei sind, wenn $\varkappa$ zu dem Index von ϱ relativ prim ist, t_1, t_2, t_3 ganze rationale Zahlen, d. h. $\varepsilon_0^{\varphi(\varkappa^2)}$ liegt schon in $O(\bar{\varrho})$. In dem Falle, wo $\varkappa$ mit dem Index von ϱ gemeinsame Teiler hat, kann man auch ohne Schwierigkeit den Exponenten μ finden. Alles reduziert sich jetzt also auf das Problem, unter den Potenzen von $\bar{\varepsilon}_0$ alle diejenigen zu finden, welche binom in $\bar{\varrho}$ sind, d. h. die Form $\overline{P}_i\bar{\varrho} + Q_i$ haben. Indem wir diese Betrachtung wiederholen, gehen wir in die Ringe $O(\bar{\bar{\varrho}})$, $O(\bar{\bar{\bar{\varrho}}})$ usw. über. Wir können so konsekutiv den Ring, in welchem wir die Lösung zu suchen haben, immer weiter erhöhen, bis endlich ein gewisses $\varkappa^*$ gleich 1 wird, was nur dann sein kann, wenn die betreffende Zahl $-a^*\varrho^* + b^* + a^*n^*$ eine rationale oder algebraische Einheit sein wird.

Bemerkung. Es kann geschehen, daß bei der Fundamentaleinheit selbst des Ringes $O(\varrho)$ die Koeffizienten von ϱ^2 und ϱ durch ν^2 und $\nu \neq 1$ teilbar sind, d. h. daß ε_0 selbst schon in dem relativ zu $O(\varrho)$ „vielfachen" Ringe $O(\nu\varrho)$ liegt. In diesem Falle werden wir unmittelbar zu dem Ring $O(\nu\varrho)$ übergehen, indem wir den Faktor ν zu ϱ hinzufügen. Dasselbe kann an einer beliebigen anderen Stelle des Algorithmus, bei der Berechnung der Einheit ε_0^* in einem gewissen Ringe $O(\varrho^*)$, vorkommen, dann werden wir ebenso handeln. So kommt es manchmal vor, daß man außer den erhöhenden Faktoren $\varkappa, \bar{\varkappa}, \bar{\bar{\varkappa}}, \ldots$ noch diese „komplementären" Faktoren ν bekommt, welche den Ring noch mehr erhöhen.

7. Erster Fall:

$-a^*\varrho^* + b^* + a^*n^*$ wird an keiner Stelle des Algorithmus eine Einheit. Wenn $-a^*\varrho^* + b^* + a^*n^*$ stets keine Einheit ist, so sollen die P_i aller Lösungen durch $\varkappa, \varkappa\bar{\varkappa}, \varkappa\bar{\varkappa}\bar{\bar{\varkappa}}, \varkappa\bar{\varkappa}\bar{\bar{\varkappa}}\bar{\bar{\bar{\varkappa}}}, \ldots$ usw. teilbar sein, d. h. jeder P_i übersteigt eine beliebig große Zahl; die Gleichung $(q, -p, n, 1) = 1$ hat also in diesem Falle außer der trivialen keine Lösungen.

8. Zweiter Fall:

$-a^*\varrho^*+b^*+a^*n^*$ *wird an einer gewissen Stelle des Algorithmus eine rationale Einheit, d. h.* $+1$ *oder* -1. Wenn ein gewisses $-a^*\varrho^*+b^*+a^*n^*=\pm 1$ ist, so haben wir $a^*=0$, $b^*=\pm 1$. Alle Lösungen sind binome Einheiten im Ringe $O(\varrho^*)$, welcher die Fundamentaleinheit $\varepsilon_0^*=a^*\varrho^{*2}+b^*\varrho^*+c^*$, d. h. $\pm\varrho^*+c^*$, hat. Da wir aber vorausgesetzt haben, daß unsere Form nach § 4 transformiert wurde, daß sie keine inversen Lösungen hat, so sind alle Lösungen Potenzen mit ganzen positiven Exponenten m dieser direkten positiven Einheit ε_0^* des Ringes $O(\varrho^*)$, und zwar solche Potenzen, welche in ϱ^* binom, d. h. von der Form $P^*\varrho^*+Q$ sind. Sei $\varrho^*=k\varrho$, wo k das Produkt aller erhöhenden und komplementären Faktoren $\varkappa$ und ν ist. Wenn wir $k>1$ haben, so ist $(\pm\varrho^*+c^*)^m=P^*\varrho^*+Q$, d. h. $(\pm k\varrho+c^*)^m=P^*k\cdot\varrho+Q$, was nach dem Theorem des § 5 für keinen $m>1$ möglich ist. In diesem Falle hat also die Gleichung $(q,-p,n,1)=1$, außer der trivialen, nur die einzige Lösung $\pm k\varrho+c^*$ und keine weiteren Lösungen mehr.

Bemerkung. Diese Schlußweise ist aber nicht möglich, wenn $k=1$ ist, anders gesagt, wenn die Fundamentaleinheit des Ringes $O(\varrho)$, ε_0 selbst von der Form $\pm\varrho+c$ ist, weil man dann nicht das Theorem des § 5 anwenden kann. In diesem Falle kann man aber zu einer der ganzen Form $(q,-p,n,1)$ äquivalenten „parallelen“ ganzen Form übergehen, deren Wurzel $\varrho\pm c$, d. h. eine Einheit, ist. Eine solche ganze Form, deren beide extremen Koeffizienten gleich 1 sind, werden wir eine „reversible“ Form nennen. Wir werden uns speziell mit solchen Formen in den §§ 11 bis 21 beschäftigen.

9. Dritter Fall:

$-a^*\varrho^*+b^*+a^*n^*$ *wird an einer gewissen Stelle eine algebraische Einheit.* Sei $-a^*\varrho^*+b^*+a^*n^*$ eine algebraische Einheit ε^*. Wenn man $\varepsilon_0^*=\frac{\alpha\varrho^*+\beta}{\gamma\varrho^*+\delta}$ setzt, dann kann man, wie eine leichte Rechnung zeigt, z. B. $\alpha=\pm(abn+b^2-a^2p-ac)$; $\beta=\pm(acn+bc-a^2q)$; $\gamma=\pm(-a)$; $\delta=\pm(b+an)$ nehmen. Wir werden noch hier den Vorzeichen $\pm$ so wählen, daß $N(\gamma\varrho^*+\delta)=\pm N(\varepsilon^*)=+1$ wird. Dann wird, wie man leicht verifiziert, $\alpha\delta-\beta\gamma=N(\varepsilon^*)=\pm 1$. Sei jetzt $z^3=rz^2+sz+1$ die Gleichung, welcher die Einheit ε_0^* genügt, dann erkennen wir, daß die Form

$$
\begin{aligned}
&(1,-s,r,1)=(X\varepsilon_0^*+Y)(X\varepsilon_0^{*\prime}+Y)(X\varepsilon_0^{*\prime\prime}+Y)\\
&=N\left(X\frac{\alpha\varrho^*+\beta}{\gamma\varrho^*+\delta}+Y\right)=N(X(\alpha\varrho^*+\beta)+Y(\gamma\varrho^*+\delta))\frac{1}{N(\gamma\varrho^*+\delta)}\\
&=N((X\alpha+Y\gamma)\varrho^*+(X\beta+Y\delta))\\
&=(X\varrho^*+Y)(X\varrho^{*\prime}+Y)(X\varrho^{*\prime\prime}+Y)=(q^*,-p^*,n^*,1)
\end{aligned}
$$

ist, wenn wir $X = \alpha X + \gamma Y$, $Y = \beta X + \delta Y$ setzen, und $z^3 = n^* z^2 + p^* z + q^*$ die Gleichung ist, der ϱ^* genügt. Wir sehen also, daß $(1, -s, r, 1) = (q^*, -p^*, n^*, 1)_{\binom{\alpha\ \gamma}{\beta\ \delta}}$ ist, da aber $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist, so sehen wir, daß die erhöhte Form $(q^*, -p^*, n^*, 1) = (k^3 q, -k^2 p, kn, 1)$ der reversiblen Form $(1, -s, r, 1)$ äquivalent ist. Wir sehen also, daß das Problem sich auch in diesem dritten Falle auf eine reversible Form reduziert.

10.

Theorem. *$-a\varrho + b + an$ kann in einem erhöhten Ringe nicht eine algebraische Einheit sein.*

Beweis. Wir nehmen immer an, daß die Gleichung so transformiert ist, daß sie keine inversen Lösungen hat. Wenn also $-a\varrho + b + an$ eine algebraische Einheit ist, so ist sie eine Potenz $\pm \varepsilon_0^{\mu}$ der direkten positiven Einheit $\varepsilon_0 = a\varrho^2 + b\varrho + c$ des Ringes $O(\varrho)$ mit einem ganzen positiven Exponenten μ, welcher größer als 1 ist. μ kann nicht 1 sein, weil dann $-a\varrho + b + an = \pm(a\varrho^2 + b\varrho + c)$ wäre, und also $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, was unmöglich ist. Sei jetzt $\eta_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}$. Eine leichte Rechnung gibt $\pm \eta_0^{\mu} = \frac{1}{-a\varrho + b + an} = a\varepsilon + a'$, wo $a' = abn + b^2 - a^2 p - ac$ ist. Wir erhalten hieraus $\pm \eta_0^{\mu+1} = a'\eta_0 + a$. Wenn wir aber voraussetzen, daß $O(\varrho)$ ein erhöhter Ring, d. h. daß $\varrho = k\varrho_0 + r$ ist, wo $k > 1$ und r ganze rationale und ϱ_0 eine ganze algebraische Zahl ist, so haben wir

$$\eta_0 = \varepsilon_0^{-1} = a'\varrho^2 + b'\varrho + c' = k\theta + c''.$$

Wo θ eine ganze algebraische Zahl ist, hat man folglich $\eta_0^{\mu+1} = (k\theta + c'')^{\mu+1}$. Wir bekommen also $\pm(k\cdot\theta + c'')^{\mu+1} = a'\eta_0 + a = a'k\cdot\theta + (a'c'' + a)$, was nach dem Theorem des § 5 (weil $k > 1$) unmöglich ist, q. e. d.

Bemerkung zu den §§ 7, 8, 9, 10. Aus allem, was in den §§ 7, 8, 9 und 10 gesagt ist, sehen wir unter anderem, daß die Gleichung $(q, -p, n, 1)$ mehr als eine einzige Lösung (die triviale Lösung $X = 0$, $Y = 1$ nicht gezählt) nur in dem Falle haben kann, wo die Form $(p, -q, n, 1)$ selbst einer reversiblen Form äquivalent ist, was man nach § 9 immer durch die Berechnung der Fundamentaleinheit ε_0 konstatieren kann.

11. Über die Reduktion einer reversiblen Gleichung auf die fundamentale reversible Gleichung.

Wenn eine reversible Gleichung gegeben ist, d. h. wenn $q = 1$ ist, so ist ϱ eine algebraische Einheit. ϱ kann aber auch die nicht fundamentale Einheit des Ringes $O(\varrho)$ sein; zum Beispiel ist die Wurzel ε der Gleichung $z^3 = z^2 - 2z + 1$ eine Einheit, aber nicht die fundamentale Einheit des

Ringes $O(\varepsilon)$; die fundamentale Einheit des Ringes $O(\varepsilon)$ ist $\varepsilon_0 = \varepsilon^2 - \varepsilon + 1$, und wir haben $\varepsilon = \varepsilon_0^2$. Daraus aber, daß ε_0 in $O(\varepsilon)$ enthalten ist, folgt, daß $D_{\varepsilon_0} \geqq D_\varepsilon$, und daraus, daß ε eine Potenz von ε_0 ist, folgt ebenso, daß $D_\varepsilon \geqq D_{\varepsilon_0}$, wir haben also $D_{\varepsilon_0} = D_\varepsilon$. Wenn wir also dieselben Überlegungen wie in § 9 machen, so sehen wir, daß, wenn $z^3 = rz^2 + sz + 1$ die Gleichung ist, der ε_0 genügt, die Formen $(1, -p, n, 1)$ und $(1, -s, r, 1)$ äquivalent sind. So ist es leicht, von der Form $(1, -p, n, 1)$ zu einer Form $(1, -r, s, 1)$, welche die Fundamentaleinheit des Ringes $O(\varepsilon)$ als Wurzel hat, überzugehen.

12. Über die Lösungen der reversiblen Form mit geraden Exponenten.

Sei $(1, -p, n, 1)$ eine fundamentale, direkte, reversible Form, alle ihre Lösungen werden Potenzen mit ganzen positiven Exponenten der positiven direkten Fundamentaleinheit ε und der ihr inversen Einheit η sein; hier ist ε die Wurzel der Gleichung $z^3 = nz^2 + pz + 1$. Wir werden die geraden und die ungeraden Exponenten einzeln betrachten. Fangen wir mit den geraden an. Wenn wir die Lösungen von der Form $(\varepsilon^2)^{m_i}$ suchen, so werden wir ganz analog wie in § 6 bekommen, daß alle P_i dieser Lösungen durch $\frac{\varepsilon'^2 - \varepsilon''^2}{\varepsilon' - \varepsilon''} = \varepsilon' + \varepsilon''$ teilbar sein müssen. Wenn $N(\varepsilon' + \varepsilon'') \neq \pm 1$ ist, so werden wir eine von 1 verschiedene Zahl $\varkappa$ erhalten, durch welche alle P_i dieser Lösungen teilbar sein sollen; ganz analog müssen die P_i aller Lösungen $(\eta^2)^{m_i}$ durch $\frac{\eta'^2 - \eta''^2}{\varepsilon' - \varepsilon''}$ teilbar sein; wir haben aber

$$\frac{\eta'^2 - \eta''^2}{\varepsilon' - \varepsilon''} = \frac{\frac{1}{\varepsilon'^2} - \frac{1}{\varepsilon''^2}}{\varepsilon' - \varepsilon''} = -\frac{\varepsilon'^2 - \varepsilon''^2}{(\varepsilon'\varepsilon'')^2(\varepsilon' - \varepsilon'')},$$

d. h. $N\left(\frac{\eta'^2 - \eta''^2}{\varepsilon' - \varepsilon''}\right)$ ist auch gleich $N(\varepsilon' + \varepsilon'')$, und wir sehen, daß sie auch alle durch $\varkappa$ teilbar sein müssen. Es zeigt sich also, daß alle direkten wie inversen Lösungen mit geraden Exponenten binome Einheiten des vielfachen Ringes $O(\varkappa\varepsilon)$ sind. Umgekehrt, jede binome Einheit des Ringes $O(\varkappa\varepsilon)$ ist eine Lösung der gegebenen reversiblen Gleichung.

13. Über die revertierte Form.

Jede reversible Form hat immer, außer der trivialen Lösung 1, noch die Lösung ε. Wenn wir die reversible Form mittels der Lösung ε, d. h. der Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$, wo wir $\alpha = 0$, $\gamma = -1$ nehmen, transformieren, so erkennen wir nach § 3, daß die Wurzel der transformierten Form $\eta = \varepsilon^{-1}$ ist. Wir sehen also, daß die „revertierte" Form $(1, n, -p, 1)$ der Form $(1, -p, n, 1)$ äquivalent ist und aus dieser durch die Lösung ε gewonnen wird.

14. Über die Lösungen der reversiblen Form mit ungeraden Exponenten.

Um die Lösungen $P_i\varepsilon + Q_i$ mit ungeraden Exponenten zu untersuchen, gehen wir zur revertierten Form über. Nach § 13 werden allen Lösungen der gegebenen Form mit ungeraden Exponenten die Lösungen der revertierten Form mit geraden Exponenten entsprechen, und umgekehrt. Diese Lösungen sind $\frac{1}{\varepsilon}(P_i\varepsilon + Q_i) = Q_i\eta + P_i$. Alle Q_i derjenigen von diesen Lösungen, welche direkt sind, müssen durch $\frac{\varepsilon'^2 - \varepsilon''^2}{\eta' - \eta''}$ teilbar sein; wir haben aber

$$N\left(\frac{\varepsilon'^2 - \varepsilon''^2}{\eta' - \eta''}\right) = N(\varepsilon' + \varepsilon''),$$

also müssen, wenn $N(\varepsilon' + \varepsilon'') \neq \pm 1$ ist, alle Q_i durch $\varkappa \neq 1$ teilbar sein. Ganz analog müssen die Q_i aller inversen Lösungen durch $\frac{\eta'^2 - \eta''^2}{\eta' - \eta''}$ teilbar sein; wir haben aber

$$N\left(\frac{\eta'^2 - \eta''^2}{\eta' - \eta''}\right) = N(\varepsilon' + \varepsilon''),$$

also müssen auch alle Q_i dieser Lösungen durch dieselbe Zahl $\varkappa$ teilbar sein. Wir sehen also, daß allen Lösungen der gegebenen reversiblen Form mit ungeraden Exponenten, den direkten wie den inversen, in $\varkappa\eta$ binome Einheiten des Ringes $O(\varkappa\eta)$ entsprechen. Umgekehrt: jede in $\varkappa\eta$ binome Einheit des Ringes $O(\varkappa\eta)$ ist eine Lösung der gegebenen reversiblen Gleichung, man hat nur P_i und Q_i zu vertauschen.

15. Über die Nichtäquivalenz der beiden Formen, auf welche sich eine reversible Form, im Falle $N(\varepsilon' + \varepsilon'') \neq \pm 1$ ist, reduziert.

Wenn $N(\varepsilon' + \varepsilon'') \neq \pm 1$ ist, so reduziert sich also die Lösung der reversiblen Gleichung $(1, -p, n, 1) = 1$ auf die Lösung der beiden vielfachen Gleichungen: $(\varkappa^3, -p\varkappa^2, n\varkappa, 1) = 1$ und $(\varkappa^3, n\varkappa^2, -p\varkappa, 1) = 1$; es ist leicht zu sehen, daß diese beiden Formen nicht äquivalent sind. In der Tat: würde dies der Fall sein, so müßten sich die Wurzeln $\varkappa\varepsilon$ und $\varkappa\eta$ dieser Formen gegenseitig ganzzahlig ausdrücken, das ist aber nicht möglich, weil $\varepsilon = \eta^2 + p\eta + n$, und $\varkappa\varepsilon = \varkappa\eta^2 + \varkappa p\eta + \varkappa n$ ist; es ist aber unmöglich, drei solche ganze Zahlen A, B, C zu finden, daß $\varkappa\eta^2 + \varkappa p\eta + \varkappa n = A\varkappa^2\eta^2 + B\varkappa\eta + C$ wäre.

16. Über diejenigen Fälle, wo $N(\varepsilon' + \varepsilon'') = 1$ ist.

Wir haben so eine Methode erhalten, welche uns in den Stand setzt, im Falle der reversiblen Gleichung das Problem auf „vielfache“ Gleichungen zu reduzieren, bei welchen nur die Fälle I und II des Algorithmus der Erhöhung auftreten können. Hier sind aber noch Ausnahmefälle geblieben, nämlich diejenigen, wo $N(\varepsilon' + \varepsilon'') = \pm 1$ ist. Wir haben $N(\varepsilon' + \varepsilon'') = N(n - \varepsilon) = np + 1$ und $np + 1 = +1$, wenn $n = 0$ oder $p = 0$ ist.

Diese beiden Fälle werden wir in den zwei folgenden Paragraphen betrachten. $np+1=-1$, wenn $np=-2$ ist, d. h. in den Fällen: $n=1$, $p=-2$; $n=-1$, $p=2$; $n=2$, $p=-1$; $n=-2$, $p=1$, was Gleichungen mit den Diskriminanten -23, $+49$, -23, $+49$ gibt. Hier bekommen wir also nur zwei Gleichungen mit negativen Diskriminanten; diese beiden Gleichungen sind aber der Gleichung $z^2=-z^2+1$ äquivalent, welche wieder von dem Typus $p=0$ ist. Es bleibt demnach nur übrig, die Gleichungen mit $n=0$ oder $p=0$ zu untersuchen.

17. Die Potenzen der Wurzel der Gleichung $z^3=pz+1$, wenn $|p|\neq 1$ ist.

Nehmen wir an, daß wir die reversible Gleichung $z^3=pz+1$ haben und sei ε ihre Wurzel; wir werden ihre Lösungen von der Form ε^m, wo m positiv ist, untersuchen. Wenn der Koeffizient M von ε^2 in ε^m Null ist, so haben wir, wie leicht zu sehen ist, eine von den drei folgenden Gleichungen:

(1) wenn $m=3\gamma+2$ ist:

$$1+p^3\frac{(\gamma-1)\gamma(\gamma+1)}{1\,2\cdot3}+p^6\frac{(\gamma-3)(\gamma-2)(\gamma-1)\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots=0;$$

(2) wenn $m=3\gamma+1$ ist:

$$\gamma+p^3\frac{(\gamma-2)(\gamma-1)\gamma(\gamma+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+p^6\frac{(\gamma-4)(\gamma-3)(\gamma-2)(\gamma-1)\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}+\ldots=0;$$

(3) wenn $m=3\gamma$ ist:

$$\frac{\gamma(\gamma-1)}{1\cdot2}+p^3\frac{(\gamma-3)(\gamma-2)(\gamma-1)\gamma(\gamma+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+p^6\frac{(\gamma-5)(\gamma-4)(\gamma-3)(\gamma-2)(\gamma-1)\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}+\ldots=0.$$

Es ist evident, daß für $|p|\neq 1$, der Fall $m=3\gamma+2$ unmöglich ist. Was aber die beiden anderen Fälle betrifft, so bemerken wir, daß eine Primzahl p in $m!$ höchstens mit dem Exponenten $\frac{m-1}{p-1}$ aufgeht; bezeichnen wir $\frac{p^m}{m!}$ mit $\bar{p}^m$, so sehen wir, daß der Bruch $\bar{p}^m$, nach Kürzung mit p, mindestens $E\left(m-\frac{m-1}{p-1}\right)$ Faktoren p im Zähler hat (hier werden wir durch das Zeichen E das größte Ganze bezeichnen). Wir werden die zweite und dritte der vorstehenden Gleichungen so schreiben:

$$\bar{p}\cdot\gamma+\bar{p}^4(\gamma+1)\ldots(\gamma-2)+\bar{p}^7(\gamma+2)\ldots(\gamma-5)+\ldots=0;$$
$$\bar{p}^2\gamma(\gamma-1)+\bar{p}^5(\gamma+1)\ldots(\gamma-3)+\bar{p}^8(\gamma+2)\ldots(\gamma-5)+\ldots=0.$$

Nehmen wir erstens an, daß $|p|$ eine Primzahl und größer als 3 ist, dann wird hier jedes folgende Glied durch eine höhere Potenz von $|p|$ teilbar als das erste, weil $E\left(4-\frac{3}{p-1}\right) > E\left(4-\frac{3}{3}\right) = 3$ ist, und $E\left(m-\frac{m-1}{p-1}\right)$ verkleinert sich nicht mit der Vergrößerung von m, die erste Gleichung ist also unmöglich; $E\left(5-\frac{4}{p-1}\right) \geqq E\left(5-\frac{4}{4}\right) = 3$, folglich ist auch die zweite Gleichung unmöglich. Wenn $|p| = 3$ und γ genau durch $3^\varkappa$ teilbar ist, so wird in der ersten Gleichung das erste Glied durch $3^{\varkappa+1}$ und das zweite wenigstens durch $3^{\varkappa+E\left(4-\frac{3}{2}\right)} = 3^{\varkappa+2}$ teilbar sein, die folgenden sind aber, weil $E\left(m-\frac{m-1}{2}\right)$ mit der Vergrößerung von m sich nicht verkleinert, auch wenigstens durch $3^{\varkappa+2}$ teilbar; also ist auch für $|p| = 3$ die erste Gleichung unmöglich; in der zweiten Gleichung ist, wenn $|p| = 3$ und $\gamma(\gamma-1)$ genau durch $3^\varkappa$ teilbar ist, das erste Glied genau durch $3^{\varkappa+2}$ teilbar, das zweite wenigstens durch $3^{\varkappa+4}$, das dritte wenigstens durch $3^{\varkappa+E\left(8-\frac{5}{2}\right)} = 3^{\varkappa+4}$, und die folgenden auch wenigstens durch $3^{\varkappa+4}$; die zweite Gleichung ist also für $|p| = 3$ ebenfalls unmöglich. Sei endlich $|p| = 2$ und γ genau durch $2^\varkappa$ teilbar, dann ist das erste Glied der ersten Gleichung genau durch $2^{\varkappa+1}$ und alle folgenden durch eine höhere Potenz von 2 teilbar, weil nach der Kürzung von $\overline{2}^m$ mit 2, 2 niemals im Nenner bleibt, und im Zähler im zweiten und im dritten Gliede außer den Faktoren $\gamma(\gamma-1)$ noch wenigstens zwei konsekutive Faktoren vorhanden sind, d. h. wenigstens noch ein Faktor 2. Wenn $|p|$ keine Primzahl ist, so können wir aus $|p|$ einen Primfaktor π aussondern, für welchen wir die vorhergehende Untersuchung durchführen; wenn nach dieser Aussonderung π noch in $|p|\pi^{-1}$ aufgeht, so wird jedes folgende Glied durch eine desto höhere Potenz dieses Primfaktors teilbar sein. Wir sehen also, daß unter den Potenzen ε^m, wo ε die Wurzel einer Gleichung von der Form $z^3 = pz+1$, $|p| \neq 1$ und $m > 1$ ist, außer der Potenz ε^3, welche gleich $p\varepsilon+1$ ist, keine andere in ε binome Einheit auftritt.

18. Lösung der direkten reversiblen Gleichung im Falle $n=0$, $p \neq -1$.

Wenn $z^3 = pz+1$ eine direkte reversible Gleichung ist, so schließen wir aus $D = 4p^3 - 27 < 0$, daß $p = 1, 0$ oder < 0 ist; aber $p = 1$ gibt eine inverse Gleichung, $p = 0$ eine reduzible. Die Gleichung $z^3 = -z+1$ werden wir in § 19 betrachten, es bleiben demnach nur die Fälle $p < -1$. Alle direkten Lösungen sind Potenzen von ε mit positivem Exponenten m, nach dem vorigen Paragraphen gibt es im Falle $|p| \neq 1$ nur zwei solche Lösungen ε und $\varepsilon^3 = p\varepsilon+1$. Alle inversen Lösungen sind Potenzen von $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^2 - p$, welche binom in ε sind. Wir können hier das Resultat des § 2 anwenden, wir werden nämlich zeigen, daß schon $\varepsilon^{-1} > \sqrt[3]{H^2+1}$ ist,

d. h. daß es keine inversen Lösungen gibt. In der Tat wird die Ungleichung $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^2 - p > \sqrt[3]{H^2+1} = \sqrt[3]{\left[\frac{3}{|D|}(2p\varepsilon+3)\right]^2+1}$ befriedigt, da man sie auch so schreiben kann:

$$\varepsilon^6 + 3|p|\varepsilon^4 + 3|p|^2\varepsilon^2 + |p|^3 - 1 > \frac{9}{|D|}(4|p|^2\varepsilon^2 - 12|p|\cdot\varepsilon + 9)$$

oder

$$|p|^2\varepsilon^2 + |p|\varepsilon + |p|^3 > \frac{36}{|D|}|p|^2\varepsilon^2 - \frac{108}{|D|}|p|\cdot\varepsilon + \frac{81}{|D|},$$

das ist aber richtig, weil für $p < -1$ $|D| \geqq 59$ und also $|p|^2\varepsilon^2 > \frac{36}{|D|}|p|^2\varepsilon^2$, ferner $|p|\varepsilon > -\frac{108}{|D|}|p|\varepsilon$ und $|p|^3 > \frac{81}{|D|}$ ist. Wir sehen also, daß eine direkte fundamentale Gleichung von der Form $z^3 = pz + 1$, wenn $p \neq -1$ ist, keine Lösungen hat, außer den drei folgenden: der trivialen Lösung 1 und den zwei selbstverständlichen ε und $\varepsilon^3 = p\varepsilon + 1$.

19. Lösung der Gleichung (1, 1, 0, 1) = 1.

Setzen wir $\varepsilon^m = M_m\varepsilon^2 + P_m\varepsilon + Q_m$ und berechnen wir eine kleine Tabelle der Potenzen ε^m. Wir sehen, daß außer der ersten Potenz und dem Kubus auch noch die achte Potenz binom ist. Wir werden beweisen, daß es weiter bis ins Unendliche keine anderen Potenzen gibt, welche binom sind. In der Tat: Nehmen wir an, daß es weitere solche Potenzen gäbe, z. B. $\varepsilon^m = P_m\varepsilon + Q_m$, m müßte eine von den acht Formen $m = 8\gamma + r$ (wo $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ist) haben, d. h. ε^m wäre von der Form $(3\varepsilon - 2)^\gamma \cdot \varepsilon^r$. Wir haben aber

m	M_m	P_m	Q_m
1	0	1	0
2	1	0	0
3	0	−1	1
4	−1	1	0
5	1	1	−1
6	1	−2	1
7	−2	0	1
8	0	3	−2
			usw.

$$(3\varepsilon - 2)^\gamma = (-2)^\gamma + \gamma(-2)^{\gamma-1}\cdot 3\varepsilon + \frac{\gamma(\gamma-1)}{1\cdot 2}(-2)^{\gamma-2}\cdot 3^2\varepsilon^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(-2)^{\gamma-3}3^3\varepsilon^3 + \ldots,$$

und es wäre also M_m für die entsprechenden r von der Form

$r = 0)$ $\frac{\gamma(\gamma-1)}{1\cdot 2}(-2)^{\gamma-2}\cdot 3^2 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(-2)^{\gamma-3}\cdot 3^3\cdot M_3 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)(\gamma-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(-2)^{\gamma-4}\cdot 3^4\cdot M_4 + \ldots,$

$r = 1)$ $\gamma(-2)^{\gamma-1}\cdot 3 + \frac{\gamma(\gamma-1)}{1\cdot 2}(-2)^{\gamma-2}\cdot 3^2\cdot M_3 + \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(-2)^{\gamma-3}\cdot 3^3\cdot M_4 \ldots,$

usw.

In allen diesen Fällen ist $M_m = 0$ unmöglich, was man leicht sieht, wenn man nach der Methode des § 5 und § 17 die Teilbarkeit der konsekutiven Glieder durch die Potenzen von 3 untersucht und bemerkt, daß M_4, M_5, M_6, M_7 nicht durch 3 teilbar sind und $M_3 = 0$ ist. Die Gleichung $(1, 1, 0, 1)$ hat also keine direkten Lösungen außer $\varepsilon, \varepsilon^3, \varepsilon^8$. Was aber die inversen Lösungen betrifft, so zeigt die Anwendung der Methode des § 2, daß es solche nicht gibt. Alle Lösungen der Gleichung $(1, 1, 0, 1) = 1$ sind also die folgenden: $\varepsilon^0 = 1$, $\varepsilon^1 = \varepsilon$, $\varepsilon^3 = -\varepsilon + 1$, $\varepsilon^8 = 3\varepsilon - 2$.

20. Der Fall $p = 0$.

Die Gleichung $z^3 = nz^2 + 1$ kann nur in dem Falle direkt sein, wo $n < 0$ ist, die Diskriminante aber gleich $-4n^3 - 27$ ist, und kann nur dann < 0 sein, wenn $n > -2$ ist. Der Fall $p = 0$ führt also auf die einzige Gleichung mit $n = -1$, d. h. auf die Gleichung $(1, 0, -1, 1) = 1$.

21. Lösung der Gleichung $(1, 0, -1, 1) = 1$.

Wir werden wieder mit der Berechnung einer Tabelle der Potenzen $\varepsilon^m = M_m \varepsilon^2 + P_m \varepsilon + Q_m$ anfangen. Wir sehen, daß außer ε noch ε^5 und ε^{14} binom sind. Wir haben diese Rechnung bis zu $m = 120$ fortgesetzt (ε^{120} ist z. B. $11275550 \cdot \varepsilon^2 + 9734175 \cdot \varepsilon - 13773374$), aber nach der Lösung ε^{14} sind wir keinen weiteren Lösungen begegnet; wir werden beweisen, daß es bis ins Unendliche keine weiteren Lösungen gibt. In der Tat, wenn es eine weitere Lösung gäbe, so wäre sie von der Form $(4\varepsilon - 3)^\gamma \cdot \varepsilon^r$, wo r eine von den Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13$ ist. Wir haben die Gleichung

m	M_m	P_m	Q_m
1	0	1	0
2	1	0	0
3	−1	0	1
4	1	1	−1
5	0	−1	1
6	−1	1	0
7	2	0	−1
8	−2	−1	2
9	1	2	−2
10	1	−2	1
11	−3	1	1
12	4	1	−3
13	−3	−3	4
14	0	4	−3
			usw.

$$(1) \quad (4\varepsilon - 3)^\gamma = (-3)^\gamma + \gamma(-3)^{\gamma-1} \cdot 4\varepsilon + \frac{\gamma(\gamma-1)}{1 \cdot 2}(-3)^{\gamma-2} \cdot 4^2 \varepsilon^2 + \ldots;$$

wenn wir mit ε^r multiplizieren, so bekommen wir, daß der Koeffizient von ε^2 gleich

$$(2) \quad M_r \cdot (-3)^\gamma + M_{r+1} \cdot \gamma(-3)^{\gamma-1} \cdot 4 + M_{r+2} \cdot \frac{\gamma(\gamma-1)}{1 \cdot 2}(-3)^{\gamma-2} \cdot 4^2 + \ldots$$

ist. Es ist evident, daß dieser Koeffizient in den Fällen $r = 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 13$ nicht Null sein kann, weil in diesen Fällen, wie man aus der Tabelle sieht, M_r nicht durch 4 teilbar ist. In den Fällen $r = 1$ und 5 haben wir $M_r = 0$, M_{r+1} ist aber resp. gleich 1 und -1; wenn also γ genau durch 2^k teilbar ist, so ist das erste folgende von Null ver-

schiedene Glied $M_{r+1} \cdot \gamma(-3)^{\gamma-1} \cdot 4$ durch 2^{k+2} teilbar, und alle folgenden Glieder sind, wie man leicht nach der Methode von § 5 sieht, durch noch höhere Potenzen von 2 teilbar. Der Fall $r = 0$ gibt

$$\frac{\gamma(\gamma-1)}{1\cdot 2}(-3)^{\gamma-2} \cdot 4^2 + M_3 \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(-3)^{\gamma-3} \cdot 4^3 + \ldots,$$

was ganz analog nicht gleich Null sein kann. Es bleibt nur noch der Fall $r = 12$; hier gibt uns die direkte Untersuchung des Koeffizienten (2) nichts, weil $M_{12} = 4$ und $M_{13} = -3$ sind; also können wohl die beiden ersten Glieder durch ein und dieselbe Potenz von 2 teilbar sein. Wir können aber in diesem Falle auch $\varepsilon^m = (4\varepsilon - 3)^\gamma \cdot \varepsilon^{-2}$ schreiben und bekommen den Koeffizienten von ε^2 in ε^m, indem wir (1) mit $\varepsilon^{-2} = \varepsilon + 1$ multiplizieren, in der Form:

$$\gamma \cdot 4(-3)^{\gamma-1} + M_3 \frac{\gamma(\gamma-1)}{1\cdot 2} \cdot 4^2(-3)^{\gamma-2} + M_4 \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot 4^3(-3)^{\gamma-3} + \ldots$$
$$+ \frac{\gamma(\gamma-1)}{1\cdot 2} \cdot 4^2(-3)^{\gamma-2} + M_3 \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot 4^3(-3)^{\gamma-3} + \ldots$$

(zwei Glieder heben sich hier, weil $M_3 = -1$ ist). Sei γ genau durch 2^k teilbar, dann ist das erste Glied genau durch 2^{k+2} und alle folgenden wenigstens durch 2^{k+6} teilbar; dieser Koeffizient kann also auch nicht Null sein. Es gibt also keine direkten Lösungen mit $m > 14$. Die direkte Anwendung der Methode des § 2 zeigt, daß es nur eine einzige inverse Lösung $\varepsilon^{-2} = \varepsilon + 1$ gibt. Alle Lösungen der Gleichung $(1, 0, -1, 1) = 1$ sind also die folgenden fünf: $\varepsilon^{-2} = \varepsilon + 1$; $\varepsilon^0 = 1$; $\varepsilon' = \varepsilon$; $\varepsilon^5 = -\varepsilon + 1$; $\varepsilon^{14} = 4\varepsilon - 3$.

22. Fundamentaltheorem über die Anzahl der Lösungen.

Als Resultat dieser Untersuchungen hat sich folgendes Fundamentaltheorem ergeben:

Theorem. *Die unbestimmte Gleichung* $(A, B, C, E) = 1$ *hat im Falle einer negativen Diskriminante im allgemeinen nicht mehr als zwei Lösungen, wenn aber die Form einer reversiblen Form äquivalent ist, so können drei und vier Lösungen sein, und endlich ist es eine und nur eine solche Gleichung vorhanden (wenn man die ihr äquivalenten nicht mitzählt), welche fünf Lösungen hat; keine solche Gleichung kann mehr als fünf Lösungen haben.*

In der Tat sehen wir aus den vorhergehenden Untersuchungen: I. Wenn die Form $(q, -p, n, 1)$ einer reversiblen Form nicht äquivalent ist, so hat die Gleichung $(q, -p, n, 1) = 1$ nicht mehr als eine einzige Lösung (wir zählen hier nicht die triviale Lösung $x = 0$, $y = 1$), siehe §§ 7 bis 10;

I. Wenn die Form einer reversiblen Form äquivalent ist, so reduziert sich nach §§ 11 bis 15 die Auffindung aller ihrer Lösungen auf zwei Formen des ersten Typus, von welchen jede nicht mehr als eine einzige Lösung haben kann; außerdem ist noch ε selbst eine Lösung; III. Alle Ausnahmegleichungen, welche in den §§ 16 bis 21 untersucht waren, haben auch nicht mehr als drei Lösungen, und nur die einzige Gleichung des § 21 hat vier Lösungen. Wenn aber eine Form (A, B, C, E) gegeben ist, so ist sie entweder 1. einer ganzen Form nicht äquivalent und dann hat die Gleichung $(A, B, C, E) = 1$ keine Lösungen, oder 2. sie ist einer ganzen Form, aber keiner reversiblen Form äquivalent, dann hat sie eine einzige Lösung, wenn diese Form keine nichttrivialen Lösungen hat, nämlich diejenige Lösung, welche (A, B, C, E) in diese ganze Form transformiert; wenn aber diese ganze Form eine nichttriviale Lösung hat, so hat (A, B, C, E) zwei Lösungen. Wenn 3. die Form (A, B, C, E) einer reversiblen ganzen Form äquivalent ist, dann hat sie zwei Lösungen, die den Lösungen $\varepsilon^0 = 1$ und $\varepsilon' = \varepsilon$ der reversiblen Form entsprechen, wenn keine von den beiden ganzen Formen von § 15 eine nichttriviale Lösung hat, drei Lösungen, wenn nur eine von diesen beiden Formen eine Lösung hat, und vier Lösungen, wenn diese beiden Formen Lösungen haben. Wenn endlich (A, B, C, E) der Form $(1, 0, -1, 1)$ äquivalent ist, d. h. die Diskriminante -23 hat, so hat die Gleichung $(A, B, C, E) = 1$ fünf Lösungen. Keine solche Gleichung kann demnach mehr als fünf Lösungen haben.

Wir erhalten also die Tabelle

Anzahl der Lösungen:

wenn die Form einer reversiblen Form nicht äquivalent ist	0	
	1	
	2	wenn die Form einer reversiblen Form äquivalent ist, wenn $D = -23$.
	3	
	4	
	5	

Bemerkung. Man kann immer leicht entscheiden, ob die gegebene Form (A, B, C, E) einer reversiblen Form äquivalent ist; es genügt dazu die Fundamentaleinheit ε_0 des Ringes mit der Basis $[\omega_1, \omega_2, 1]$, wo ω_1 und ω_2 die Wurzeln der Gleichungen $z^3 - Bz^2 + ACz - A^2E = 0$ und $z^3 - Cz^2 + BEz - AE^2 = 0$ sind, zu berechnen. Wenn die Form (A, B, C, E) einer reversiblen Form äquivalent ist, so ist $D_{\varepsilon_0} = D_{(A, B, C, E)}$, und umgekehrt. Die Form (A, B, C, E) ist nämlich in diesem Falle, wenn $\varepsilon^3 = nz^2 + pz + 1$ die Gleichung ist, welcher ε_0 genügt, der reversiblen Form $(1, -p, n, 1)$ äquivalent. Siehe die Erläuterung zur Tabelle I im Anhang.

23. Über die Anzahl der Lösungen der Gleichung $U^3 - V^2 = \varkappa$, wo $\varkappa < 0$ ist.

Es ist längst bekannt, daß die Gleichung

$$U^3 - V^2 = \varkappa, \tag{1}$$

wo U und V zwei unbestimmte ganze Zahlen sind und $\varkappa$ eine gegebene ganze Zahl, eng mit der Gleichung

$$(A, B, C, E) = 1 \tag{2}$$

verknüpft ist, und daß die Auflösung dieser Gleichungen auf äquivalente Probleme führt. Alle Versuche, die recht bemerkenswerte Gleichung (1) zu lösen und so darauf die Lösung der Gleichung (2) zu begründen, sind bis jetzt gescheitert. Kein einziger allgemeiner Satz wurde gefunden. Erst als Axel Thue sein grundlegendes Theorem veröffentlichte, war es endlich bewiesen, daß die Gleichung (1) niemals eine unendliche Anzahl Lösungen haben kann.

Wie wir gleich zeigen werden, liefert uns das Theorem des vorigen Paragraphen für den Fall $\varkappa < 0$ eine solche Grenze. Diese Grenze hängt ab von der Klassenzahl der binären kubischen Formen der Diskriminante $D = 108\varkappa$ (diese Klassenzahl ist, wie bekannt, mit der Klassenzahl der binären quadratischen Formen von der Diskriminante $-3\varkappa$ verbunden) und von der Darstellungszahl der Zahl 1 durch solche Formen. Für diese letzte Zahl aber liefert uns unser Fundamentaltheorem eine Grenze, welche höchst merkwürdigerweise nicht von den Koeffizienten dieser Formen oder ihrer Diskriminante abhängt, sondern ganz einfach eine konstante Zahl, nämlich 5 ist. Es ist also möglich, die Grenze für die Anzahl der Lösungen der Gleichung (1) wenigstens im Falle $\varkappa < 0$, nur von der Klassenzahl der binären quadratischen Formen der Diskriminante $-3\varkappa$ allein abhängig zu machen.

Ob dasselbe für $\varkappa > 0$ gilt, wissen wir nicht.

Sei die Gleichung (1) gegeben; indem wir sie mit $2^2 \cdot 3^3 = 108$ multiplizieren und $3U = p$; $2V = q$ setzen, erhalten wir $4p^3 - 27q^2 = 108\varkappa$. Die binäre kubische Form $(q, -p, 0, 1)$ hat also die Dikriminante $108\varkappa$. Wenn wir alle Formenklassen der Diskriminante $108\varkappa$ aufstellen, so haben wir noch alle solche Formen in jeder von diesen Klassen zu suchen, welche die Form $(q, -p, 0, 1)$ haben. Sei (A, B, C, E) der Repräsentant einer dieser Klassen. Wenn $(A, B, C, E)_{\binom{\alpha\beta}{\gamma\delta}} = (q, -p, 0, 1)$ ist, so haben wir die Gleichungen

$$A\beta^3 + B\beta^2\delta + C\beta\delta^2 + E\delta^3 = 1, \tag{3}$$

$$\alpha(3A\beta^2 + 2B\beta\delta + C\delta^2) + \gamma(B\beta^2 + 2C\beta\delta + 3E\delta^2) = 0 \quad \text{und} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Sei β_1, δ_1 eine Lösung der Gleichung (3), dann haben wir, wenn wir

$$3A\beta_1^2 + 2B\beta_1\delta_1 + C\delta_1^2 = R, \qquad B\beta_1^2 + 2C\beta_1\delta_1 + 3E\delta_1^2 = S$$

setzen, zur Bestimmung der zugehörigen α und γ die beiden Gleichungen

$$\alpha\delta_1 - \gamma\beta_1 = 1,$$
$$\alpha R + \gamma S = 0.$$

Da aber ihre Determinante $\delta_1 S + \beta_1 R = 3$ ist, also von 0 verschieden ist, sehen wir, daß es für jede Lösung β, δ der Gleichung (3) höchstens ein einziges Paar α, γ, d. h. eine einzige Form $(q, -p, 0, 1)$, d. h. eine einzige Lösung U, V der Gleichung (1) gibt. Wenn also h die Anzahl der Klassen der binären kubischen Formen mit der Diskriminante $108\varkappa$ ist und $e_1, e_2, \ldots, e_h$ die Anzahlen der Darstellungen der Zahl 1 durch die Formen dieser Klassen sind, so kann die Anzahl der Lösungen der Gleichung (1) nicht die Zahl

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_h$$

übersteigen.

Sei $h = H + T$, wo H die Anzahl der irreduziblen Klassen und T diejenige der reduziblen ist. Alle mit den reduziblen Klassen verknüpften Lösungen können wir leicht finden. In der Tat, wenn $z^3 - pz - q$ reduzibel ist, so haben wir $z^3 - pz - q = (z - r)(z^2 + sz + t)$, wo r, s, t ganze rationale Zahlen sind; die Vergleichung der Koeffizienten gibt $s = r$; $t = r^2 - p$, wir sehen also, daß eine Wurzel ϱ der Gleichung $z^3 - pz - q = 0$ rational ist und die beiden anderen ϱ' und ϱ'' die Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2 + rz + (r^2 - p) = 0$ sind, woraus wir

$$D = [(r - \varrho')(r - \varrho'')(\varrho' - \varrho'')]^2 = (3r^2 - p)^2 \cdot (4p - 3r^2)$$

erhalten. Wenn wir $3r^2 - p = \Delta_1$ und $4p - 3r^2 = \Delta_2$ setzen, so wird $D = \Delta_1^2 \cdot \Delta_2$ sein. Wir erhalten so

$$p = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{3}; \qquad r^2 = \frac{4\Delta_1 + \Delta_2}{9}; \qquad q = rt = (r^2 - p)r = \frac{\Delta_1 - 2\Delta_2}{27}\sqrt{4\Delta_1 + \Delta_2},$$

somit $U = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{9}$, woraus $U - r^2 = -\frac{\Delta_1}{3}$ folgt; also müssen Δ_1 und Δ_2 durch 3 teilbar sein, $\frac{\Delta_1}{3} = V_1$; $\frac{\Delta_2}{3} = V_2$. Um daher alle reduziblen Gleichungen $z^3 - pz - q = 0$ mit der Diskriminante $108\varkappa$ zu finden, haben wir die Zahl $\frac{D}{27} = 4\varkappa$ auf alle möglichen Arten so in zwei Faktoren V_1 und V_2 zu zerlegen, daß $V_1^2 \cdot V_2 = 4\varkappa$ wird, dann werden diejenigen unter ihnen, für welche $V_1 + V_2 \equiv 0 \pmod 3$ und $4V_1 + V_2$ ein dreifaches Quadrat ist, die entsprechenden Lösungen U, V der Gleichung (1) geben, wenn wir $U = \frac{V_1 + V_2}{3}$, $V = \frac{V_1 - 2V_2}{6} \cdot r$ setzen.

Wir haben keine Methode die Lösungen U, V, welche den irreduziblen Klassen entsprechen, zu finden. Was aber ihre Anzahl anbetrifft, so ist sie im Falle $\varkappa < 0$ gewiß nicht größer als $4H$. Denn aus $\varkappa < 0$ folgt $D < 0$, und die Anwendung unseres Fundamentaltheorems liefert uns, daß alle betreffenden e_i die Zahl 4 nicht übersteigen (weil $e_i = 5$ nur im Falle $D = -23$ auftritt und das nicht durch 108 teilbar ist).

Anhang.

Tabelle I.

Wir beginnen mit einer Tabelle aller kubischen Ringe, deren Diskriminanten negativ und absolut kleiner als 628 sind. Diese Tabelle bedarf einer kurzen Erläuterung. Sei O ein Ring eines kubischen Körpers und sei $1, \omega_1, \omega_2$ seine Basis. Wir werden nur solche Basen betrachten, in welchen wie hier die erste Zahl gleich 1 ist. Wenn $\omega = a_0 + a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ eine Zahl des Ringes und $D_\omega = D_O \cdot \Delta^2$, d. h. Δ der Relativindex von ω ist, so weiß man, daß $\Delta = A a_1^3 + B a_1^2 a_2 + C a_1 a_2^2 + E a_2^3$ ist, wo die ganzen rationalen Zahlen A, B, C, E durch die Basis $1, \omega_1, \omega_2$ bestimmt sind. Zwei Basen $1, \omega_1, \omega_2$ und $1, \omega_1 + c_1, \omega_2 + c_2$, wo c_1 und c_2 zwei ganze rationale Zahlen sind, werden wir parallel nennen. Es ist leicht, die folgenden Sätze zu beweisen: I. Parallelen Basen entspricht eine und dieselbe Indexform (A, B, C, E); II. eine beliebige irreduzible binäre kubische Form (A, B, C, E) ist die Indexform einer Parallele von Basen eines kubischen Ringes. Man bekommt nämlich die Zahlen ω_1 und ω_2 einer Basis dieses Ringes aus den Gleichungen $z^3 - Bz^2 + ACz - A^2E = 0$ und $z^3 - Cz^2 + BEz - AE^2 = 0$; III. die Diskriminante der Indexform ist gleich der Diskriminante des zugehörigen kubischen Ringes; IV. äquivalenten[3]) Basen entsprechen äquivalente Indexformen, d. h. die Klassen irreduzibler binärer kubischer Formen und die kubischen Ringe entsprechen sich eineindeutig. Das Merkmal dafür, daß es in einem kubischen Ringe eine Potenzbasis von der Form $1, \varrho, \varrho^2$ gibt, ist das Vorhandensein einer ganzen Form (d. h. mit $E = 1$) in der zugehörigen Formenklasse, oder, anders gesagt, die Möglichkeit durch die Formenklasse die Zahl 1 darzustellen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß es in der zugehörigen Formenklasse eine Form mit $A = E = 1$ gibt, besteht in dem Umstande, daß der Index der Fundamentaleinheit des Ringes gleich ± 1

[3]) D. h. Basen von der Form $1, \omega_1, \omega_2$, welche durch eine unimodulare Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ ineinander transformiert sind, entsprechen Indexformen, welche durch die unimodulare Substitution $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ ineinander transformiert sind.

ist. Das Merkmal des außerwesentlichen gemeinsamen Diskriminantenteilers im Ringe (der im kubischen Körper nur 2 sein kann) ist die Tatsache, daß die beiden äußeren Koeffizienten A und E gerade und die beiden inneren B und C ungerade sind. — In der nachfolgenden Tabelle sind alle Formenklassen (Ringe) mit $D < 0$ nach steigenden $|D|$ bis $|D| = 620$ gegeben. In der ersten Kolonne stehen die absoluten Werte der Diskriminanten. In der zweiten Kolonne stehen die Koeffizienten n, p, q der kubischen Gleichung $z^3 = nz^2 + pz + q$, welcher ϱ genügt, wenn es in dem betreffenden Ringe eine Potenzbasis $1, \varrho^2, \varrho$ gibt (d. h. die zugehörige Indexform des Ringes eine ganze Form $(q, -p, n, 1)$ ist), wenn es aber keine Potenzbasis gibt, so ist eine Indexform (A, B, C, E) des Ringes gegeben. Im Falle, wo A, B, C, E einen gemeinsamen Teiler haben, ist dieser Teiler aus den Klammern gezogen. Wenn der betreffende Ring einen außerwesentlichen gemeinsamen Diskriminantenteiler hat, ist „auß." hinzugefügt. Wir sehen insbesondere: der erste Ring, welcher nicht infolge eines dieser beiden „trivialen" Gründe keine Potenzbasis besitzt, ist der Ring mit der Diskriminante $D = -516$; wir haben nämlich durch die Methode des § 6 bewiesen, daß die Form $(3, 3, 4, 2)$, welche die Indexform dieses Ringes ist, die Zahl 1 darzustellen nicht fähig ist.

$-D$	n	p	q	$-D$	n	p	q	$-D$	n	p	q	$-D$	n	p	q
23	−1	0	1	216	0	−3	2	367	4	−7	1	491	−4	−6	1
31	0	−1	1	231	−4	−5	1	368	2(1, 1, 2, 1)			492	2	−4	6
44	−1	−1	1	236	2	1	2	379	1	−1	4	496	2(1, 0, 1, 1)		
59	0	−2	1	239	0	1	3	411	1	−5	2	499	0	−4	3
76	1	−3	1	243	0	0	3	416	1	−5	1	503 auß.	(2, 5, 5, 4)		
83	−2	−2	1	244	5	−4	2	416	2	−1	4				
87	−1	−2	1	247	−3	−4	1	419	3	1	2	515	4	−4	5
104	0	1	2	255	5	−8	1	424	8	7	2	516	(3, 3, 4, 2)		
107	2	−4	1	268	7	−13	1	428	3	−2	4	519	5	−4	3
108	0	0	2	279	2	−5	1	431 auß.	(2, 1, 3, 2)			524	1	−3	5
116	1	0	2	283	0	−4	1					527	0	−5	1
135	0	−3	1	300	4	−2	2	432	0	0	4	543	1	−2	5
139	4	−6	1	304	−5	−7	1	436	3	−4	6	547	4	−2	3
140	3	−5	1	307	2	−4	5	439	2	1	3	556	4	−3	4
152	1	2	2	324	0	3	4	440	7	−6	2	560	2	0	4
172	2	0	2	327	4	−3	3	451	5	−3	2	563	2	−6	1
175	−2	−3	1	331	−2	−4	1	459	3	3	2	567	3	0	3
176	−1	−3	1	332	1	−2	4	460	1	−5	3	575	−2	−5	1
199	1	−4	1	335	−1	−4	1	464	3	−5	7	588	−1	−5	1
200	2	−3	4	339	2	0	3	464	−3	−5	1	608	5	−9	1
204	1	−1	3	351	3	−6	1	472	3	2	2	608	1	−1	5
211	6	−10	1	356	0	7	−8	484	2	−5	6	620	4	0	2
212	1	−4	2	364	0	−4	2								

Tabelle II.

Diese zweite Tabelle gibt die Lösungen aller Gleichungen von der Form $(A, B, C, E) = 1$, wo (A, B, C, E) die Repräsentanten aller Klassen der irreduziblen binären kubischen Formen von negativer Diskriminante D mit $|D| = 300$ sind. In der ersten Kolonne stehen die Diskriminanten. Da alle diese 35 Formen ganz sind, so stehen in der zweiten Kolonne die entsprechenden kubischen Gleichungen $z^3 = nz^2 + pz + q$. In der dritten Kolonne steht die direkte positive Fundamentaleinheit des betreffenden Ringes. In der vierten Kolonne endlich *alle* Potenzen dieser Einheit, welche binom sind, d. h. Lösungen liefern.

$-D$			
23	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 + 1$	ε	$\varepsilon^{-2} = \varepsilon + 1;\ \varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon;$ $\varepsilon^5 = -\varepsilon - 1;\ \varepsilon^{14} = 4\varepsilon - 3$
31	$\varepsilon^3 = -\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon;\ \varepsilon^3 = -\varepsilon + 1;$ $\varepsilon^8 = 3\varepsilon - 2$
44	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon;\ \varepsilon^4 = 2\varepsilon - 1;$ $\varepsilon^{17} = -103\varepsilon + 56$
59	$\varepsilon^3 = -2\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon;\ \varepsilon^3 = -2\varepsilon + 1$
76	$\varepsilon^3 = \varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon;\ \varepsilon^8 = -36\varepsilon + 13$
83	$\varepsilon^3 = -2\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon$
87	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon$
104	$\varrho^2 = \varrho + 2$	$-\varrho^2 + \varrho + 1$	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^2 = 2\varrho - 3$
107	$\varepsilon^3 = 2\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon;\ \varepsilon^4 = -7\varepsilon + 2$
108	$\varrho^3 = 2$	$\varrho - 1$	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varrho - 1$
116	$\varrho^3 = \varrho^2 + 2$	$\varrho^2 - \varrho - 1$	$\varepsilon^0 = 1$
135	$\varepsilon^3 = -3\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon;\ \varepsilon^3 = -3\varepsilon + 1$
139	$\varepsilon^3 = 4\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon$
140	$\varepsilon^3 = 3\varepsilon^2 - 5\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon$
152	$\varrho^3 = \varrho^2 + 2\varrho + 2$	$-\varrho^2 + \varrho + 3$	$\varepsilon^0 = 1$
172	$\varrho^3 = 2\varrho^2 + 2$	$-\varrho^2 + 2\varrho + 1$	$\varepsilon^0 = 1$
175	$\varepsilon^3 = -2\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon$
176	$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon$
199	$\varepsilon^3 = \varepsilon^2 - 4\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon$
200	$\varrho^3 = 2\varrho^2 - 3\varrho + 4$	$\varrho^2 - \varrho - 1$	$\varepsilon^0 = 1$
204	$\varrho^3 = \varrho^2 - \varrho + 3$	$-\varrho^2 + \varrho + 1$	$\varepsilon^0 = 1$
211	$\varepsilon^3 = 6\varepsilon^2 - 10\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon$
212	$\varrho^3 = \varrho^2 - 4\varrho + 2$	$2\varrho - 1$	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = 2\varrho - 1$
216	$\varrho^3 = -3\varrho + 2$	$-\varrho^2 - \varrho + 1$	$\varepsilon^0 = 1$
231	$\varepsilon^3 = -4\varepsilon^2 - 5\varepsilon + 1$	ε	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^1 = \varepsilon$
236	$\varrho^3 = 2\varrho^2 + \varrho + 2$	$\varrho^2 - 3\varrho + 1$	$\varepsilon^0 = 1$
239	$\varrho^3 = \varrho + 3$	$\varrho^2 - \varrho - 1$	$\varepsilon^0 = 1;\ \varepsilon^2 = 3\varrho - 5$

$-D$			
243	$\varepsilon^3=-\varepsilon^2-12\varepsilon+1$	ε	$\varepsilon^0=1;\ \varepsilon^1=\varepsilon$
244	$\varrho^3=5\varrho^2-4\varrho+2$	$-2\varrho^2+10\varrho-7$	$\varepsilon^0=1$
247	$\varepsilon^3=-3\varepsilon^2-4\varepsilon+1$	ε	$\varepsilon^0=1;\ \varepsilon^1=\varepsilon$
255	$\varepsilon^3=5\varepsilon^2-8\varepsilon+1$	ε	$\varepsilon^0=1;\ \varepsilon^1=\varepsilon$
268	$\varepsilon^3=7\varepsilon^2-13\varepsilon+1$	ε	$\varepsilon^0=1;\ \varepsilon^1=\varepsilon$
279	$\varepsilon^3=2\varepsilon^2-5\varepsilon+1$	ε	$\varepsilon^0=1;\ \varepsilon^1=\varepsilon$
283	$\varepsilon^3=-4\varepsilon+1$	ε	$\varepsilon^0=1;\ \varepsilon^1=\varepsilon;\ \varepsilon^3=-4\varepsilon+1$
300	$\varrho^3=4\varrho^2-2\varrho+2$	$-\varrho^2+5\varrho-5$	$\varepsilon^0=1$

Tabelle III.

Die dritte Tabelle gibt *alle* ganzen kubischen Gleichungen, d. h. Gleichungen von der Form $z^3=nz^2+pz+q$, wo n, p, q ganze rationale Zahlen sind, für alle negativen Diskriminanten bis zur Diskriminante -172. Für jede von diesen Diskriminanten, für welche es solche Gleichungen gibt, sind nämlich in der Tabelle die Repräsentanten aller „Parallelen“ von solchen Gleichungen verzeichnet. Unter zwei parallelen Gleichungen verstehen wir hier zwei Gleichungen, deren Wurzeln sich nur um eine ganze rationale (additive) Zahl unterscheiden. In jeder Parallele ist die Gleichung mit dem absolut kleinsten n gegeben. Die Tabellen II und III sind engmiteinander verknüpft.

D	n	p	q
-23	1	-2	1
	-1	0	1
	0	1	1
	-1	4	5
	0	55	157
-31	0	-1	1
	1	0	1
	1	2	1
	0	17	27
-44	-1	-1	1
	1	1	1
	1	11	11
	-1	31281	2139919
-59	0	-2	1
	-1	1	2
	1	9	8
-76	1	-3	1
	0	2	2
	1	3077	64681
-83	1	-1	2
	-1	3	4
-87	-1	-2	1
	-1	2	3
-104	0	1	2
	1	46	106
-107	1	-3	2
	1	3	2
	-1	157	812
-108	0	0	2
	0	6	6
-116	1	0	2
-135	0	-3	1
	0	3	3
	0	33	73
-139	-1	-1	2
	0	8	9
-140	0	-2	2
	-1	5	7
-152	1	2	2
-172	2	0	2

Tabelle IV.

Diese kleine Tabelle enthält alle Lösungen der Gleichung $U^3 - V^2 = \varkappa$ für $\varkappa = -1, -2, \ldots, -6$.

-1	-2	-3	-4	-5	-6
$-1, 0$ $0, 1$ $2, 3$	$-1, 1$	$1, 2$	$0, 2$	$-1, 2$	keine Lösungen

(Eingegangen am 28. Juni 1928.)

Bemerkung über die Abhandlung von Herrn Trygve Nagell: „Darstellung ganzer Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativen Diskriminanten“[1]).

Von

Boris Delaunay in Leningrad.

Ich erlaube mir zu bemerken, daß sich der durch Herrn T. Nagell angeführte Hauptsatz über die Anzahl der Darstellungen außer in den C. R. **171** (1920), S. 336, wo er mit einem kurzen Beweise versehen ist, auch mit einem ganz detaillierten Beweise in dem «Bulletin de l'Académie des Sciences de Russie» für das Jahr 1922, S. 253—272 (russisch) erschienen ist. Der erste *vollständige* Beweis wurde aber der Math. Gesellsch. in Kiew in einer Sitzung im Oktober 1919 vorgetragen.

Sei $\Phi(x, y) = Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Ey^3$ eine binäre kubische Form von negativer Diskriminante D. Wie ich dort zeige, kann man immer, in einer im voraus begrenzten Anzahl von Schritten, entscheiden, ob sie einer Form mit $A = E = 1$ äquivalent ist oder nicht. Wenn dies der Fall ist [und dann erhalten wir gleich zwei evidente Lösungen] nennen wir φ „speziell“, sonst „allgemein“. Die Beweise der §§ 2, 3, 4; 12 der Nagellschen Arbeit stimmen mit meinen Beweisen in den C. R. **171** (1920), diejenigen der §§ 9, 10, 11 mit meinen Beweisen in der Abhandlung von 1922 überein. Die höchst einfache und sehr schöne Methode des § 7, mittels welcher Herr Nagell die „speziellen“ Formen behandelt, zu welcher die §§ 5, 6; 8 die nötigen Lemmas liefern, weicht von der meinen vollständig ab und ermöglicht Herrn Nagell einen Zusatz zu meinen Resultaten zu machen, nämlich für die „speziellen“ Formen mein Resultat zu verschärfen. Für die „allgemeinen“ Formen aber erreicht das Nagellsche Resultat die Schärfe des meinen von 1922 nicht. Der Grund dafür besteht darin, daß bei Herrn Nagell ein Lemma fehlt, welches bei mir in § 10

[1]) Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 10—29.

bewiesen ist. Mein Theorem von 1919 lautet nämlich: Die Anzahl der Lösungen von $\varphi(x, y) = 1$ (wenn $D < 0$ ist) kann sein

$$\text{für eine „allgemeine“ Form } \left\{\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\\\\\\3\\4\end{matrix}\right\} \text{ für „spezielle“ Formen mit } |D| > 23,$$

$$\text{und ist gleich } 5 \text{ für die einzige Klasse mit } D = -23,$$

bei Herrn Nagell steht aber:

$$\text{für alle Formen mit } |D| > 44 \left\{\begin{matrix}0\\1\\2\\3\end{matrix}\right.$$

$$\text{und ist gleich } \left\{\begin{matrix}4 \text{ für die zwei Klassen } -44, -31,\\5 \text{ für die eine Klasse } -23,\end{matrix}\right.$$

weil Herr Nagell keine Möglichkeit hat die „allgemeinen“ Formen von den „speziellen“ in Hinsicht der Anzahl der Darstellungen zu trennen; dafür beweist er aber für die „speziellen“ Formen, daß es nur zwei Klassen mit vier Darstellungen gibt. Wenn wir jetzt zu meiner Tabelle von 1922 das Nagellsche Resultat hinzufügen, bekommen wir die folgende endgültige Tabelle:

$$\text{für eine „allgemeine“ Form } \left\{\begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix}\\\\\\3\end{matrix}\right\} \text{ für „spezielle“ Formen mit } |D| > 44,$$

$$4 \text{ für die zwei Klassen mit } D = -44, -31,$$

$$5 \text{ für die eine Klasse mit } D = -23.$$

In den C. R. **172** (1921), S. 434, C. R. **178** (1924), S. 1458 und in Journ. de la Soc. Math. de Leningrad **1** (1927), S. 257—267 habe ich die Methode, welche in § 4 der Note in C. R. (1920) auseinandergesetzt ist und «Algorithme de rehaussement» genannt ist (§ 3 der Nagellschen Abh.), verallgemeinert, um über die wirkliche Auflösung von $\varphi = 1$ Aufschlüsse machen zu können. Mit ihrer Hilfe habe ich z. B. die *vollständige* Lösung aller Gleichungen $\varphi = 1$ mit $-300 \leqq D < 0$ erhalten.

(Eingegangen am 25. April 1928.)

Eine Erweiterung des Begriffs der Abelschen Gruppe: p-Abelsche Gruppen.

Von

Herbert Rauter in Königsberg i. Pr.

Herrn Professor W. F. Meyer zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum.

Die Erweiterung des Begriffs der Abelschen Gruppe, die hier untersucht werden soll, besteht in einer Erweiterung ihres Exponentenbereiches: die Exponenten sollen hier nicht mehr ganze rationale Zahlen, sondern Zahlen des Ringes $R(p)$ der ganzen p-adischen Zahlen[1]) sein, wo p eine rationale Primzahl bedeutet, also Größen von der Form

$$\alpha = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots \qquad (a_i = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Daß eine derartige Gruppe, die ich eine *p-Abelsche Gruppe* nennen will, nicht nur ein willkürliches Produkt des spekulativen mathematischen Geistes ist, zeigt der Umstand, daß in der p-adik vielfach derartige Gruppen auftreten, so daß der hier zugrunde gelegte Exponentenbereich dort direkt als der naturgemäße anzusehen ist. Ist z. B. k irgendein endlicher algebraischer Zahlkörper und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ irgendeine Basis für die ganzen Zahlen desselben, so wird beim Übergang zum transzendenten Henselschen Erweiterungskörper für die Primzahl p das System aller Größen[2])

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \ldots + x_n \alpha_n$$

betrachtet, wo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig voneinander alle ganzen p-adischen Zahlen von $R(p)$ durchlaufen können, und dieses System ist nichts anderes als eine (unendliche) p-Abelsche Gruppe in unserem Sinne.

---

[1]) K. Hensel, Zahlentheorie, Berlin und Leipzig 1913.

[2]) K. Hensel, Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig und Berlin 1908, Bd. 1, Kap. 6, § 1.

Ihre weittragendste Wirkung entfalten die p-Abelschen Gruppen aber bei Gelegenheit der multiplikativen Darstellung der π-adischen Zahlen[3]). Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Primteiler des algebraischen Körpers K und π eine Primzahl des transzendenten Henselschen Erweiterungskörpers $K(\mathfrak{p})$, so sind bekanntlich alle Zahlen A von $K(\mathfrak{p})$ in der Form

$$A = \pi^a w^b \eta_0^{c_0} \eta_1^{c_1} \dots \eta_\lambda^{c_\lambda}$$

darstellbar, wo w eine primitive $(p^f - 1)$-te Einheitswurzel aus $K(\mathfrak{p})$ bedeutet, (p = rationale Primzahl, in der $\mathfrak{p}$ aufgeht, f = Grad von $\mathfrak{p}$), $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_\lambda$ aber Einseinheiten $\eta_h = 1 + w_i \pi^i + \dots$ von hier nicht näher interessierenden Graden i sind; von den Exponenten durchläuft a alle ganzen rationalen Zahlen, b alle Zahlen der Reihe $0, 1, \dots, p^f - 2$, $c_0, c_1, \dots, c_\lambda$ durchlaufen aber alle ganzen p-adischen Zahlen

$$c_i = c_i^{(0)} + c_i^{(1)} p + c_i^{(2)} p^2 + \dots, \qquad c_i^{(k)} = 0, 1, \dots, p-1,$$

höchstens mit einer einzigen Ausnahme, wo nämlich etwa c_0 nur das Restklassensystem nach einer gewissen Potenz p^r von p durchläuft, $c_0 = 0, 1, \dots, p^r - 1$. Zugleich zeigt sich hierbei ein weiterer Typus von „gemischten" Abelschen Gruppen, nämlich eine Zusammensetzung aus einer gewöhnlichen endlichen, einer gewöhnlichen unendlichen Abelschen Gruppe und einer unendlichen p-Abelschen Gruppe.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die p-Abelschen Gruppen geeignet sind, die ganze p-adik in ähnlicher Weise auf eine gruppentheoretische Basis zu stellen, wie es Hecke in seinen Vorlesungen zur Theorie der algebraischen Zahlen[4]) mit dieser Theorie gemacht hat.

Erweiterungen des Exponentenbereiches der Abelschen Gruppen sind schon früher untersucht worden. So hat H. Prüfer schon in seiner Habilitationsschrift (Math. Zeitschrift Bd. 20 (1924)) bemerkt, daß man nur zu fordern braucht, daß die Exponenten Elemente eines Ringes sind, um ganz ähnliche Resultate zu erhalten wie bei den gewöhnlichen Abelschen Gruppen. Weitergeführt hat er seine Betrachtungen Math. Zeitschrift Bd. 22. Dort spielen mehrfach p-adische Zahlen eine Rolle, allerdings nicht im Sinne der Exponenten unserer p-Abelschen Gruppen. Einer schriftlichen Mitteilung von Herrn Prüfer entnehme ich noch, daß die Basisdarstellung der p-Abelschen Gruppen in § 3 Spezialfall des folgenden allgemeineren Satzes ist:

Wenn der Exponentenbereich ein Integritätsbereich und jedes Ideal Hauptideal ist, gibt es bei jeder durch endlich viele Elemente erzeugten

---

[3]) Vgl. K. Hensel, Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereich eines beliebigen Primteilers, Journal f. d. r. u. a. Mathematik **146** (1916), S. 189—215.

[4]) E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1923.

Gruppe eine Basisdarstellung, insbesondere also auch für die obigen „gemischten“ Gruppen.

Weiterhin hat Krull (Math. Zeitschrift Bd. 23) allgemein einen distributiven Exponentenbereich im Sinne gehabt. Unsere p-Abelschen Gruppen würden somit als Spezialfall unter seine „verallgemeinerten Abelschen Gruppen“ einzubegreifen sein. Ob Krull an sie gedacht hat, vermag ich nicht zu sagen, da er die p-adischen Zahlen als Exponentenbereich nirgends erwähnt, als Beispiele vielmehr nur Differentialgleichungssysteme und Matrizenkomplexe nennt und behandelt. Unsere Untersuchungen sind unabhängig von den genannten Arbeiten entstanden.

Zur Frage der Bezeichnungen mag noch bemerkt sein, daß wir die Operatoren der Gruppe mit großen lateinischen, die p-adischen Zahlen mit kleinen griechischen, die gewöhnlichen rationalen Zahlen mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen werden.

§ 1.

p-zyklische Gruppen.

Wir betrachten zunächst den einfachsten Fall, daß sich alle Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ als „Potenzen“ eines einzigen Basisoperators A darstellen lassen, d. h. alle Potenzen

$$A^\alpha, \quad \text{wo} \quad \alpha = a_m p^m + a_{m+1} p^{m+1} + \ldots \qquad (m \geqq 0). \tag{1}$$

Ist A^β mit $\beta = b_n p^n + b_{n+1} p^{n+1} + \ldots$ eine zweite derartige Potenz, so soll unter ihrem „Produkt“

$$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta} = A^\beta A^\alpha \tag{2}$$

verstanden werden. Weiter soll ein Einheitselement E existieren, so daß $A^\alpha E = A^\alpha$ für jedes α wird. Setzen wir $E = A^\varepsilon$, so folgt aus $A^\alpha A^\varepsilon = A^\alpha = A^{\alpha+\varepsilon}$, daß $E = A^0$ dieser Forderung genügt. Schließlich soll zu jedem Element A^α ein inverses A^* existieren, so daß $A^\alpha A^* = E$ wird. Offenbar erfüllt $A^{-\alpha}$ diese Bedingung.

Wiederholte Multiplikation von A mit sich selbst ergibt wieder $A^\alpha A^\alpha = A^{2\alpha} = (A^\alpha)^2$, $(A^\alpha)^n = A^{n\alpha}$ für jede natürliche Zahl n. Diesen gewohnten Prozeß des Potenzierens erweitern wir durch die Definition

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\cdot\beta} = (A^\beta)^\alpha \tag{3}$$

für beliebige ganze p-adische Zahlen α und β aus $R(p)$. *Wir setzen nun fest, daß mit jedem Element A^α auch das Element (3) in $\mathfrak{G}$ vorkommen soll für beliebiges β aus $R(p)$.*

Aus dieser Definitionsgleichung (3) folgt eine für jedes Element der Gruppe gültige lim-Beziehung. Da bekanntlich eine p-adische Zahl dann im p-adischen Sinne gleich 0 ist, wenn sie für jede noch so hohe Potenz p^m von p als Modul $\equiv 0 \bmod p^m$ ist, so folgt

$$\lim_{n=\infty} (A^\alpha)^{p^n} = E \tag{4}$$

für jeden zugelassenen Exponenten α. Ist ε irgendeine Einheit für den Bereich von p, d. h. $\varepsilon = e_0 + e_1 p + \ldots$ mit $e_0 \not\equiv 0 \bmod p$, π aber eine Größe aus $R(p)$ mit einer Ordnungszahl $\geqq 1$, also $\pi = p^m (a_0 + a_1 p + \ldots)$, $m \geqq 1$, $a_0 \not\equiv 0 \bmod p$, so folgen leicht die Grenzwerte

$$\lim_{n=\infty} A^{\varepsilon^n} = E, \qquad \lim_{n=\infty} A^{\pi^n} = E; \tag{5}$$

denn ε^n bleibt für jedes n Einheit in $R(p)$ und aus

$$A^\varepsilon = E \quad \text{folgt stets} \quad A = E \tag{6}$$

für jede Einheit ε aus $R(p)$. Denn man bestimme ε_1 aus $\varepsilon \varepsilon_1 = 1\,(p)$ und bilde $(A^\varepsilon)^{\varepsilon_1} = E^{\varepsilon_1} = A^{\varepsilon \varepsilon_1}$, d. h. $A = E$. Dagegen wird die Ordnungszahl von π^ε mit n unendlich groß.

In bezug auf die Gleichheitsbeziehungen zwischen den Potenzen von A können nur zwei wesentlich verschiedene Fälle eintreten. Entweder existiert eine Gleichung der Form

$$A^\alpha = A^\beta \quad \text{mit} \quad \alpha \neq \beta \tag{7}$$

für *kein* $\alpha \neq \beta$ aus $R(p)$. Dann sind offenbar alle Potenzen von A voneinander verschieden und wir haben eine *unendliche p-zyklische Gruppe* vor uns.

Oder aber es existieren für gewisse α und β solche Relationen (7). Dann folgt durch beiderseitige Multiplikation mit $A^{-\beta}$

$$A^{\alpha-\beta} = A^{\mu^*} = E \tag{8}$$

mit $\mu^* \neq 0$. Wir denken uns nun aus allen μ^* mit der Eigenschaft $A^{\mu^*} = E$ diejenigen mit kleinster Ordnungszahl herausgegriffen und es bezeichne μ irgendeins dieser letzteren. Dann besteht eine Relation (7) dann und nur dann, wenn $\alpha - \beta = \varkappa \mu$ mit ganzen p-adischen $\varkappa$ ist. Das „dann" folgt sofort aus (3) und $A^\mu = E$, das „nur dann" daraus, daß ein $\alpha - \beta = \mu^*$ mit gleicher oder höherer Ordnungszahl als μ immer durch μ teilbar ist. Da demnach die Exponenten von A nur nach dem Modul μ zu betrachten sind, ergibt sich, daß überhaupt nur endlich viele verschiedene Potenzen von A vorhanden sind und alle Potenzen A^α gleich E werden, deren Exponent α gleiche oder höhere Ordnungszahl wie μ hat.

Setzen wir nun $\mu = p^m (m_0 + m_1 p + \ldots)$ mit $m_0 \not\equiv 0 \bmod p$ an, so haben wir, um die verschiedenen Potenzen von A zu finden, die Reste

sämtlicher Zahlen von $R(p)$ nach dem Modul μ zu suchen. Diese sind aber identisch mit dem Restklassensystem mod p^m, das gegeben ist durch die Zahlen $r_0 + r_1 p + \ldots + r_{m-1} p^{m-1}$, $r_i = 0, 1, \ldots, p-1$. Dann sind aber alle Potenzen $A^0, A^1, A^2, \ldots, A^{p^m-1}$ wirklich voneinander verschieden. Denn wären zwei dieser Potenzen einander gleich, so sieht man leicht ein, daß ein μ mit $A^{\overline{\mu}} = E$ existieren würde, dessen Ordnungszahl kleiner als die von μ wäre, entgegen der Wahl von μ. Das Rechnen mit den p-adischen Exponenten gestaltet sich demnach in diesem Falle so, daß nur ihre Reste mod μ, oder was dasselbe ist, mod p^m eine Rolle spielen. Wir haben eine endliche p-zyklische Gruppe der Ordnung p^m vor uns, die bis auf Isomorphismus identisch ist mit einer gewöhnlichen zyklischen Gruppe der Ordnung p^m.

Wir wenden uns jetzt der Aufsuchung der Untergruppen unserer p-zyklischen Gruppen zu. Da erledigt sich nach den letzten Bemerkungen sofort der Fall der endlichen p-zyklischen Gruppe. Da diese immer isomorph ist einer gewöhnlichen zyklischen Gruppe der Ordnung p^m, ist ihr Untergruppensystem und ihre Stuktur als bekannt anzusehen.

Bei der unendlichen p-zyklischen Gruppe kann zunächst jedes Element A^ε, wo ε irgendeine Einheit für den Bereich von p bedeutet, die Rolle des Basiselementes übernehmen. Dann müssen weiter mit den Potenzen A^α und A^β auch alle $A^{\xi\alpha+\eta\beta}$ in der Untergruppe vorkommen, wo ξ, η beliebige ganze p-adische Zahlen bedeuten können, d. h. die Exponenten der Untergruppe müssen im Bereiche der ganzen p-adischen Zahlen einen Modul bilden. Ist unter allen Exponenten der Untergruppe $\varkappa$ einer derjenigen von kleinstmöglicher Ordnungszahl, so schließt man wieder leicht, daß alle und nur die Exponenten der Untergruppe Vielfache von $\varkappa$ sind. Statt $\varkappa = p^k (k_0 + k_1 p + \ldots)$ kann auch einfach p^k genommen werden. Es sind daher unendlich viele Untergruppen vorhanden:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{U}_1 \text{ mit dem Basiselement } A^p,\\
&\mathfrak{U}_2 \quad " \quad " \quad " \quad A^{p^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathfrak{U}_n \quad " \quad " \quad " \quad A^{p^n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

aber auch nur diese,

und die Faktorgruppen $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{U}_1}, \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{U}_2}, \ldots$ sind zyklisch von der Ordnung p. Es mag ausdrücklich auf den Unterschied zur gewöhnlichen unendlichen zyklischen Gruppe mit dem Basiselement A hingewiesen werden, wo bekanntlich jede Potenz von A das Basiselement für eine Untergruppe gibt.

Wir fassen zusammen:

Satz 1. *Eine p-zyklische Gruppe ist entweder unendlich oder eine endliche zyklische Gruppe von Primzahlpotenzordnung p^m. Im letzteren Falle ist sie bis auf Isomorphismus identisch mit der gewöhnlichen zyklischen Gruppe derselben Ordnung. Im ersteren besitzt sie unendlich viele Untergruppen, deren Indizes die sämtlichen Potenzen p^i $(i = 1, 2, \ldots)$ von p sind, und nur diese und außerdem für jeden Index nur eine. Dem Einheitselement als Untergruppe entspricht der Index p^∞.*

Aus der Bemerkung, daß auch jede Potenz A^ε Basis der Gruppe werden kann, wo ε Einheit in $R(p)$, ergibt sich auch ein Einblick in die Automorphismengruppe. Denkt man sich die Größen von $R(p)$ in irgendeiner Reihenfolge, etwa mit wachsender Ordnungszahl, hingeschrieben, so ist die Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$ isomorph mit der Permutationsgruppe, die die Zahlen von $R(p)$ bei Multiplikation mit den Einheiten ε von $R(p)$ erfahren.

Umgekehrt ist nun durch eine Definitionsgleichung

$$A^\mu = E, \quad \mu = p^m(m_0 + m_1 p + \ldots), \; m_0 \not\equiv 0 \bmod p \tag{9}$$

eindeutig eine p-zyklische Gruppe bestimmt, nämlich diejenige, für die die Ordnungszahl von μ die kleinste ist, so daß jene Relation (9) besteht, d. h. die endliche zyklische Gruppe der Ordnung p^m. Insbesondere ist $A^\varepsilon = E$ die Definitionsgleichung der Einheitsgruppe, wenn ε Einheit für den Bereich von p. Die unendliche p-zyklische Gruppe wäre dementsprechend durch die Gleichung $A^{p^\infty} = E$ zu definieren.

Wir betrachten noch die gewöhnliche, durch die Gleichung

$$A^m = E \tag{10}$$

definierte zyklische Gruppe $\mathfrak{G}$, wo m irgendeine natürliche Zahl bedeuten kann. Durch Übergang zum p-adischen Exponentenbereich hebt sich aus ihr von selbst ihr *p-adischer Kern* heraus. Denn ist etwa $m = p^r m_1$, $(m_1, p) = 1$, also m_1 Einheit für den Bereich von p, so folgt aus den an die Gleichung (9) angeknüpften Bemerkungen, daß die zyklische Gruppe (10) übergeht in die p-zyklische Gruppe der Ordnung p^r, ihren *p-adischen Kern*, den wir mit $\mathfrak{G}_p$ bezeichnen wollen. Indem man die analoge Operation mit sämtlichen rationalen Primzahlen durchführt, schält man allmählich die sämtlichen Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ heraus. Diejenigen Primzahlen q, die überhaupt nicht in m aufgehen, liefern $\mathfrak{G}_q = E$. Diese Betrachtungen zeigen, daß man $\mathfrak{G}$ auch in der „Produktform“

$$\mathfrak{G} = \prod_p \mathfrak{G}_p \tag{11}$$

schreiben kann, wo das Produkt über sämtliche rationalen Primzahlen zu erstrecken ist.

§ 2.

Die reinen unendlichen p-Abelschen Gruppen.

Nachdem wir uns mit den p-zyklischen Gruppen ausführlich beschäftigt haben, können wir uns jetzt kurz fassen und vielfach auf die Angabe der Resultate beschränken[5]). Wir betrachten n Basiselemente $A_1, A_2, \ldots, A_n$, die miteinander vertauschbar sein mögen, und alle Potenzprodukte

$$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \text{ beliebig aus } R(p), \tag{12}$$

so daß mit dem Element C auch C^γ in der Gruppe $\mathfrak{G}$ vorkommen möge, wo γ beliebig aus $R(p)$. Diese Basiselemente sollen in dem Sinne voneinander unabhängig sein, daß ein Potenzprodukt

$$A_1^{\delta_1} A_2^{\delta_2} \ldots A_n^{\delta_n} = E$$

dann und nur dann gleich E sein soll, wenn jede einzelne Potenz $A_i^{\delta_i}$ gleich E wird. Betrachten wir die Potenzen eines einzigen Basiselements, so kommen wir wieder auf p-zyklische Gruppen zurück. Wir machen zunächst die Annahme, daß alle diese p-zyklischen Gruppen unendlich sein sollen, so daß wir *reine unendliche p-Abelsche Gruppen* mit einer endlichen Anzahl von Basiselementen vor uns haben. Sind

$$A = A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_n^{\alpha_n} \quad \text{und} \quad B = A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_n^{\beta_n}$$

irgendzwei Elemente unserer Gruppe, so wird in bekannter Weise

$$AB = A_1^{\alpha_1+\beta_1} A_2^{\alpha_2+\beta_2} \ldots A_n^{\alpha_n+\beta_n}. \tag{13}$$

Den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Basisdarstellungen liefert auf dem üblichen Beweiswege der

Satz 2. *Ist $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eine Basis der reinen unendlichen p-Abelschen Gruppe, so hängt jede andere Basis $B_1, B_2, \ldots, B_n$ derselben mit der ersten durch Gleichungen von der Form*

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1^{\beta_{11}} A_2^{\beta_{12}} \ldots A_n^{\beta_{1n}}, \\ B_2 &= A_1^{\beta_{21}} A_2^{\beta_{22}} \ldots A_n^{\beta_{2n}}, \qquad |\beta_{ik}| = \varepsilon \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_n &= A_1^{\beta_{n1}} A_2^{\beta_{n2}} \ldots A_n^{\beta_{nn}} \end{aligned} \tag{14}$$

zusammen, wo die Exponentendeterminante $|\beta_{ik}|$ eine Einheit für den Bereich von p ist.

---

[5]) Vgl. E. Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig 1923. § 11.

Satz 3. *Hängen n Elemente $B_1, B_2, \ldots, B_n$ mit den Basiselementen einer reinen unendlichen p-Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ durch die Gleichungen* (14) *zusammen, und hat die von Null verschiedene Exponentendeterminante $|\beta_{ik}|$ die Ordnungszahl u, so definieren die n Elemente $B_1, B_2, \ldots, B_n$ die Basis einer Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ vom Primzahlpotenzindex p^u. Insbesondere läßt sich die Exponentenmatrix so wählen, daß alle Exponenten unterhalb der Hauptdiagonale verschwinden und diejenigen der Hauptdiagonale selbst Potenzen von p werden, deren Produkt dann gleich dem Index der Untergruppe wird. Verschwindet endlich die Determinante, so definieren $B_1, \ldots, B_n$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ von unendlichem Index.*

Satz 4. *Ist $\mathfrak{U}$ eine Untergruppe der reinen unendlichen p-Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$ und liegt eine endliche p^i-te Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{U}$, so hat $\mathfrak{U}$ endlichen Index innerhalb $\mathfrak{G}$. Die Umkehrung versteht sich von selbst.*

Satz 5. *Sind $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ zwei Untergruppen von endlichem Index innerhalb der reinen unendlichen p-Abelschen Gruppe $\mathfrak{G}$, so enthält der Durchschnitt $\mathfrak{D}(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ unendlich viele Elemente und er ist außerdem innerhalb $\mathfrak{G}$ und damit auch innerhalb $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ von endlichem Index.*

Satz 6. *Besteht zwischen den n-gliedrigen Basen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zweier reiner unendlicher p-Abelscher Gruppen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eine Beziehung der Art*

$$
\begin{aligned}
A_1^{\alpha_{11}} A_2^{\alpha_{12}} \ldots A_n^{\alpha_{1n}} &= B_1^{\beta_{11}} B_2^{\beta_{12}} \ldots B_n^{\beta_{1n}}, \\
A_1^{\alpha_{21}} A_2^{\alpha_{22}} \ldots A_n^{\alpha_{2n}} &= B_1^{\beta_{21}} B_2^{\beta_{22}} \ldots B_n^{\beta_{2n}}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1^{\alpha_{n1}} A_2^{\alpha_{n2}} \ldots A_n^{\alpha_{nn}} &= B_1^{\beta_{n1}} B_2^{\beta_{n2}} \ldots B_n^{\beta_{nn}},
\end{aligned} \tag{15}
$$

wo die Exponentendeterminanten $|\alpha_{ik}|$ und $|\beta_{ik}|$ nur die Bedingung erfüllen sollen, nicht zu verschwinden, so besitzt der Durchschnitt $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sowohl innerhalb $\mathfrak{A}$ als auch $\mathfrak{B}$ einen endlichen Index.

Wir wollen noch die Spezialfälle von Satz 6 hervorheben. Sind beide Exponentendeterminanten $|\alpha_{ik}|$ und $|\beta_{ik}|$ Einheiten für den Bereich von p, so sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und $B_1, B_2, \ldots, B_n$ nur zwei verschiedene Basen ein und derselben Gruppe $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Ist eine derselben, etwa $|\alpha_{ik}|$, Einheit für den Bereich von p, die andere aber nicht, so ist $\mathfrak{A}$ Untergruppe von $\mathfrak{B}$ von endlichem Primzahlpotenzindex. Würden wir endlich noch zulassen, daß wieder $|\alpha_{ik}|$ eine Einheit für den Bereich von p ist, $|\beta_{ik}|$ aber verschwindet, so würde $\mathfrak{A}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{B}$ von unendlichem Index sein.

Satz 7. *Ist $\mathfrak{G}$ eine reine unendliche p-Abelsche Gruppe mit einer endlichen Zahl von Basiselementen und m eine natürliche Zahl, so gibt es nur eine endliche Anzahl von verschiedenen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ mit dem Index p^m.*

Der Beweis mag in diesem Falle kurz ausgeführt werden. Die p^m-te Potenz jedes Elementes von $\mathfrak{G}$ muß in der Untergruppe $\mathfrak{U}$ vom Index p^m liegen. Ist daher $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, so ist die durch die Basiselemente $A_1^{p^m}, A_2^{p^m}, \ldots, A_n^{p^m}$ erzeugte Untergruppe $\mathfrak{U}_m$ vom Index p^{mn} innerhalb $\mathfrak{G}$ selbst Untergruppe von $\mathfrak{U}$. Alle gesuchten Untergruppen vom Index p^m sind daher Obergruppen von $\mathfrak{U}_m$. Die voneinander verschiedenen Untergruppen $\mathfrak{U}$ sind verschiedenen Untergruppen der Faktorgruppe $\frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{U}_m}$ zugeordnet. Da die letztere endlich von der Ordnung p^{mn} ist, leuchtet der Satz ein.

§ 3.

Die endlichen p-Abelschen Gruppen.

Machen wir jetzt zweitens die Annahme, daß die durch die einzelnen Basiselemente $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definierten p-zyklischen Gruppen endlich sind, so wissen wir aus § 1, daß sie isomorph sind mit gewöhnlichen zyklischen Gruppen der Ordnungen $p^{m_1}, p^{m_2}, \ldots, p^{m_n}$, mit anderen Worten wir erhalten eine Gruppe, die der gewöhnlichen Abelschen Gruppe vom Typus $(p^{m_1}, p^{m_2}, \ldots, p^{m_n})$ und von der Ordnung $p^{m_1+m_2+\cdots+m_n}$ isomorph ist. Hieraus folgt, daß alle Untergruppenverhältnisse und Isomorphiebeziehungen genau dieselben sind, wie bei den gewöhnlichen Abelschen Gruppen desselben Typus.

Wir wollen jetzt eine gewöhnliche endliche Abelsche Gruppe $\mathfrak{G}$ von der Ordnung m betrachten, so daß $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eine beliebige Basis derselben sei, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bzw. die Ordnungen der Basiselemente, also $m = m_1 m_2 \cdots m_n$. Durch Übergang zum p-adischen Exponentenbereich wird mit einem Schlage *der zur Primzahl p gehörige Kern* der Gruppe bloßgelegt und damit auch die Invarianten der Gruppe, soweit sie Potenzen von p sind. Denn setzen wir $m_1 = p^{h_1}\bar{m}_1$, $m_2 = p^{h_2}\bar{m}_2, \ldots, m_n = p^{h_n}\bar{m}_n$, so daß $(\bar{m}_1, p) = (\bar{m}_2, p) = \ldots = (\bar{m}_n, p) = 1$ wird, so wissen wir aus § 1, daß die durch das Element A_i erzeugte zyklische Gruppe der Ordnung m_i übergeht in eine p-zyklische Gruppe der Ordnung p^{h_i}. Die Invarianteneigenschaft der p^{h_i} ergibt sich folgendermaßen. Nimmt man denselben Prozeß des Überganges zum p-adischen Exponentenbereich für irgendeine andere Basis derselben Abelschen Gruppe vor, so geht aus ihr wieder ein p-adischer Kern hervor, und diese Kerne müssen notwendig miteinander isomorph sein, d. h. die Typen der beiden p-Abelschen Gruppen müssen gleich sein und es tritt dasselbe System p^{h_i} von Primzahlpotenzen auch im zweiten Falle auf.

„Transformiert“ man die vorgelegte Abelsche Gruppe in dieser Weise für die sämtlichen rationalen Primzahlen p, so wird das ganze Invarianten-

system der Gruppe bloßgelegt. Für die Primzahlen q, die nicht in m aufgehen, ergibt sich als q-adischer Kern die Einheitsgruppe; sie geben natürlich keinen Beitrag zum Invariantensystem. Wird der zur Primzahl p gehörige Kern der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}_p$ bezeichnet, so existiert für $\mathfrak{G}$ eine zu (11) analoge Produktzerlegung

$$\mathfrak{G} = \prod_p \mathfrak{G}_p, \tag{15}$$

wo das Produkt über sämtliche rationalen Primzahlen zu erstrecken ist, das Produkt im gewöhnlichen gruppentheoretischen Sinne als direktes Produkt aufgefaßt.

Satz 8. *Die endlichen p-Abelschen Gruppen sind bis auf Isomorphismus identisch mit den gewöhnlichen Abelschen Gruppen von Primzahlpotenzordnung p^m. Durch Übergang zum p-adischen Exponentenbereich schält sich aus jeder gewöhnlichen Abelschen Gruppe ihr p-adischer Kern $\mathfrak{G}_p$ heraus und $\mathfrak{G}$ gestattet dann eine Produktdarstellung* (15).

Königsberg, den 5. Januar 1928.

(Eingegangen am 9. Januar 1928.)

Ein neuer Beweis für die Funktionalgleichung der ζ-Funktion.

Von

Hans Rademacher in Breslau.

Herr Mordell hat vor kurzem Fouriersche Reihen für die Herleitung der Funktionalgleichung der ζ-Funktion benutzt[1]). In einer anderen und, wie mir scheint, einfacheren Weise soll dies im folgenden ebenfalls geschehen.

1. Es sei $\alpha > 0$, $s = \sigma + ti$ komplex, $\Re(s) > 1$, u reell. Wird noch für reelles v

$$(\alpha + iv)^s = \exp(s \log(\alpha + iv)) \quad \text{mit} \quad |\Im(\log(\alpha + iv))| < \frac{\pi}{2}$$

gesetzt, so ist

$$\varphi(u, s, \alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha + i(n+u))^s} \tag{1}$$

eine periodische Funktion von u mit der Periode 1. Sie läßt sich in bekannter Weise in eine Fouriersche Reihe entwickeln[2]):

$$\begin{aligned} \varphi(u, s, \alpha) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i n u} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i n v}}{(\alpha + iv)^s} dv \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi n(iu+\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi n(\alpha+iv)}}{(\alpha+iv)^s} dv \\ &= \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi n(iu+\alpha)} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{2\pi n z}}{z^s} dz, \end{aligned} \tag{2}$$

[1]) L. J. Mordell, Some Applications of Fourier Series in the Analytic Theorie of Numbers, Cambridge Phil. Soc. Proc. **24** (1928), Part 4, pp. 585—596.

[2]) Hier braucht man übrigens nicht die Theorie der Fourierschen Reihen im Reellen, sondern die viel einfachere Theorie im Komplexen, die eine bloße Umformung der Laurentschen Entwicklung ist. Denn die Funktion (1) ist in dem ganzen Streifen $|\Im(u)| \leqq \frac{\alpha}{2}$, der die reelle u-Achse enthält, analytisch und periodisch.

mit $z^s = \exp(s \log z)$, $|\Im(\log z)| < \frac{\pi}{2}$. Setzt man $\log z = \log|z| + i\varphi$, so ist

$$|z^s| = |z|^\sigma e^{-\varphi t} \quad \text{mit} \quad |\varphi| < \frac{\pi}{2}.$$

Für $n \leqq 0$ folgt dann, indem man statt von $\alpha - Ri$ bis $\alpha + Ri$ auf der Geraden $\Re(z) = \alpha$ vielmehr auf einem Halbkreis in der rechten Halbebene um α als Mittelpunkt mit dem Radius R integriert und $R \to \infty$ streben läßt:

$$\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{2\pi n z}}{z^s}\, dz = 0.$$

Dagegen ist für $n > 0$

$$\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \frac{e^{2\pi n z}}{z^s}\, dz = (2\pi n)^{s-1} \int_{2\pi n\alpha - i\infty}^{2\pi n\alpha + i\infty} \frac{e^w}{w^s}\, dw = 2\pi i \frac{(2\pi n)^{s-1}}{\Gamma(s)}$$

nach einer bekannten Hankelschen Formel, die durch Umbiegen des Integrationsweges erhalten wird, derart, daß er die negative reelle w-Achse, die als Schnitt für w^s anzusehen ist, umschlingt. Damit wird aus (1) und (2) für $u = 0$

$$\varphi(0, s, \alpha) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha + in)^s} = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{-2\pi n\alpha}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung zeigt, daß $\varphi(0, s, \alpha)$ für jedes $\alpha > 0$ eine *ganze Funktion* von s ist. Folglich ist für $\alpha > 0$ auch

$$Z(s, \alpha) = \varphi(0, s, \alpha) - \alpha^{-s}$$

eine ganze Funktion von s, die für $\Re(s) > 1$ durch die Reihe

$$(3) \qquad Z(s, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(\alpha + in)^s} + \frac{1}{(\alpha - in)^s} \right)$$

und für alle s durch

$$(4) \qquad Z(s, \alpha) = -\alpha^{-s} + \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{n=1}^{\infty} n^{s-1} e^{-2\pi n\alpha}$$

dargestellt werden kann.

2. Aus (3) geht hervor, daß bei festem s mit $\Re(s) > 1$ $Z(s, \alpha)$ auch analytisch in α für $|\alpha| < 1$ ist. Also gilt die Taylorsche Entwicklung

$$(5) \qquad Z(s, \alpha) = Z(s, 0) + \frac{\alpha}{1!} \left(\frac{\partial Z(s, \alpha)}{\partial \alpha} \right)_{\alpha = 0} + \frac{\alpha^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 Z(s, \alpha)}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha = 0} + \cdots.$$

Nun folgt aber aus (3) (ebenso übrigens auch aus (4)) ohne weiteres

$$\frac{\partial Z(s, \alpha)}{\partial \alpha} = -s Z(s + 1, \alpha),$$

also geht (5) über in

$$(6)\quad Z(s,\alpha) = Z(s,0) - \frac{\alpha s}{1!} Z(s+1,0) + \frac{\alpha^2 s(s+1)}{2!} Z(s+2,0) - + \dots$$

$$= 2\left\{\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s) - \frac{\alpha s}{1!}\cos\frac{\pi(s+1)}{2}\zeta(s+1)\right.$$

$$\left. + \frac{\alpha^2 s(s+1)}{2!}\cos\frac{\pi(s+2)}{2}\zeta(s+2) - + \dots\right\},$$

da nach (3)

$$Z(s,0) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}\left(e^{-\frac{\pi i s}{2}} + e^{\frac{\pi i s}{2}}\right) = 2\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s)$$

ist.

Für $0 < \alpha < 1$ gelten zugleich (6) und (4), erstere Gleichung für $\Re(s) > 1$, letztere für alle s. Da in (6) $Z(s,\alpha)$ für alle s holomorph ist und

$$(6\,a)\qquad \cos\frac{\pi(s+1)}{2}\zeta(s+1),\quad \cos\frac{\pi(s+2)}{2}\zeta(s+2),\quad \dots$$

für $\Re(s) > 0$ durch die ζ-Reihe definiert sind, ergibt sich $\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s)$ aus (6) als analytisch für $\Re(s) > 0$. Dann aber sind die Funktionen (6 a) auch für $\Re(s) > -1$ analytisch und ganz, woraus wieder die Regularität von $\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s)$ für $\Re(s) > -1$ folgt usw. Die Gleichung (6) zeigt also, daß $\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s)$ für alle s regulär analytisch ist. Die Konvergenz von (6) bleibt für alle s gewahrt, und zwar offenbar gleichmäßig in jedem Quadrat

$$|\Re(s)| \leqq K, \qquad |\Im(s)| \leqq K.$$

3. Nun sei speziell $\Re(s) < 0$. Für $0 < \alpha < 1$ sind dann (4) und (6) zugleich sinnvoll. Aus (6) folgt

$$(7)\qquad \lim_{\alpha\to 0} Z(s,\alpha) = Z(s,0) = 2\cos\frac{\pi s}{2}\zeta(s),$$

aus (4) mit Hilfe des Abelschen Grenzwertsatzes über Potenzreihen,

$$(8)\qquad \lim_{\alpha\to 0} Z(s,\alpha) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n^{1-s}}.$$

Dann ergeben (7) und (8) zusammen

$$\zeta(1-s) = 2\frac{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}{(2\pi)^s}\zeta(s),$$

die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion.

4. Die Methode überträgt sich auch ohne weiteres auf die Dirichletschen $\zeta(s,\chi)$-Funktionen.

Sei $\chi(n)$ ein Charakter mod k, sei $\alpha>0$, $\Re(s)>1$, so ist

$$\varphi(u,s,\alpha,\chi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\chi(n)}{(\alpha+i(n+ku))^s}$$

eine periodische Funktion von u mit der Periode 1. Es ist

$$\varphi(u,s,\alpha,\chi)=\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\alpha+i((m+u)k+l))^s},$$

und die innere Summe ist gleichfalls periodisch in u mit der Periode 1. Folglich

$$\varphi(u,s,\alpha,\chi)=\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-2\pi imu}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{2\pi imv}}{(\alpha+i(kv+l))^s}\,dv$$

$$=\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2\pi m}{k}(\alpha+i(ku+l))}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\frac{2\pi m}{k}(\alpha+i(kv+l))}}{(\alpha+i(kv+l))^s}\,dv$$

$$=\frac{1}{ik}\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{2\pi m}{k}(\alpha+i(ku+l))}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{e^{\frac{2\pi m}{k}z}}{z^s}\,dz,$$

also nach 1.:

$$\varphi(u,s,\alpha,\chi)=\frac{2\pi}{k\Gamma(s)}\sum_{l=1}^{k}\chi(l)\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\frac{2\pi m}{k}(\alpha+i(ku+l))}\left(\frac{2\pi m}{k}\right)^{s-1},$$

$$\varphi(0,s,\alpha,\chi)=\left(\frac{2\pi}{k}\right)^s\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{m=1}^{\infty}m^{s-1}e^{-\frac{2\pi m\alpha}{k}}\sum_{l=1}^{k}\chi(l)e^{-\frac{2\pi iml}{k}}.$$ [3])

Für jedes $\alpha>0$ ist also $\varphi(0,s,\alpha,\chi)$ eine ganze Funktion von s. Dasselbe gilt also auch für

$$(9)\qquad Z(s,\alpha,\chi)=\varphi(0,s,\alpha,\chi)-\alpha^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\left(\frac{1}{(\alpha+in)^s}+\frac{\chi(-1)}{(\alpha-in)^s}\right),$$

$$(10)\qquad Z(s,\alpha,\chi)=-\alpha^{-s}+\left(\frac{2\pi}{k}\right)^s\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{m=1}^{\infty}m^{s-1}e^{-\frac{2\pi m\alpha}{k}}G(\chi,m,k)$$

---

[3]) Eine mit dieser Gleichung dem Sinne nach übereinstimmende Formel findet man bei Mordell, loc. cit., S. 591, Formel (3.5). Dort ist diese Formel aber Endresultat einer Schlußkette und wird nicht zum Beweise einer Eigenschaft der Funktion $\zeta(s,\chi)$ benutzt.

mit

$$G(\chi, m, k) = \sum_{l=1}^{k} \chi(l)\, e^{-\frac{2\pi i m l}{k}}. \tag{11}$$

5. Bei festem s mit $\Re(s) > 1$ gilt, wie aus (9) ersichtlich, auch hier für $|\alpha| < 1$ die Taylorsche Entwicklung

$$Z(s, \alpha, \chi) = Z(s, 0, \chi) - \frac{\alpha s}{1!} Z(s+1, 0, \chi) + \frac{\alpha^2 s(s+1)}{2!} Z(s+2, 0, \chi) - + \ldots, \tag{12}$$

wobei von

$$\frac{\partial Z(s, \alpha, \chi)}{\partial \alpha} = -s\, Z(s+1, \chi)$$

Gebrauch gemacht worden ist. Setzen wir noch $\chi(-1) = (-1)^a$, $a = 0$ oder 1, so geht aus (9) hervor:

$$Z(s, 0, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \left(e^{-\frac{\pi i s}{2}} + \chi(-1)\, e^{\frac{\pi i s}{2}} \right)$$

$$= 2 i^a \cos \frac{\pi(s+a)}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 2 i^a \cos \frac{\pi(s+a)}{2} \zeta(s, \chi).$$

Damit nimmt (12) die Form an

$$Z(s, \alpha, \chi) = 2 i^a \left\{ \cos \frac{\pi(s+a)}{2} \zeta(s, \chi) - \frac{\alpha s}{1!} \cos \frac{\pi(s+1+a)}{2} \zeta(s+1, \chi) + - \ldots \right\}. \tag{13}$$

Für $0 < \alpha < 1$ gelten (10) und (13) gemeinsam. Dann folgt wieder wie oben, daß $\cos \frac{\pi(s+a)}{2} \zeta(s, \chi)$ eine *ganze Funktion* von s ist. Über die Konvergenz von (13) gelten dieselben Bemerkungen wie bei (6).

6. Nun sei $\Re(s) < 0$. Für $0 < \alpha < 1$ sind dann (10) und (13) sinnvoll. Aus (13) folgt

$$\lim_{\alpha \to 0} Z(s, \alpha, \chi) = Z(s, 0, \chi) = 2 i^a \cos \frac{\pi(s+a)}{2} \zeta(s, \chi)$$

und aus (10):

$$\lim_{\alpha \to 0} Z(s, \alpha, \chi) = \left(\frac{2\pi}{k} \right)^s \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G(\chi, m, k)}{m^{1-s}},$$

und daher gilt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{G(\chi, m, k)}{m^{1-s}} = \frac{2 i^a \cos \frac{\pi(s+a)}{2} \Gamma(s)}{\left(\frac{2\pi}{k} \right)^s} \zeta(s, \chi). \tag{14}$$

Ist nun χ ein *eigentlicher* Charakter mod k, so gilt[4])

$$G(\chi, m, k) = \bar{\chi}(m) \sum_{l=1}^{k} \chi(l)\, e^{-\frac{2\pi i l}{k}} = \bar{\chi}(m)\, \tau(\chi).$$

Dann ergibt also (14)

$$\zeta(1-s, \chi) = \frac{2\, i^{\alpha} \cos\frac{\pi(s+a)}{2}\, \Gamma(s)}{\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{s} \tau(\chi)}\, \zeta(s, \chi),$$

die Funktionalgleichung der Funktion $\zeta(s, \chi)$.

Breslau, den 7. Januar 1929.

---

[4]) Landau, Handbuch I, S. 483 ff. Die oben mit $\tau(\chi)$ bezeichnete Größe ist $\chi(-1)\, \tau(k, \chi)$ bei Landau.

(Eingegangen am 9. Januar 1929.)

Sull'equazione di Laplace dello spazio iperbolico.

Von

Guido Ascoli in Torino.

Introduzione.

Il quadrato dell'elemento lineare dello spazio ad n dimensioni, a curvatura costante negativa $K = -1$, può porsi sotto ciascuna delle forme:

$$(\alpha) \qquad ds^2 = 4\,\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2)^2},$$

$$(\alpha') \qquad ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2}{x_n^2}$$

le quali permettono la rappresentazione conforme dello spazio stesso nell'interno (o nell'esterno) dell'ipersfera

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

o, rispettivamente, nel semispazio $x_n > 0$ (o $x_n < 0$).

Nei due casi, il parametro differenziale secondo di una funzione U, definita in un dominio dello spazio iperbolico, risulta dato dalle espressioni:

$$\Delta^* U = \frac{1}{4}(1 - \sum x_i^2)\Big[(1 - \sum x_i^2)\,\Delta_2 U + 2\,(n-2)\sum x_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\Big],$$

$$\Delta^* U = x_n\Big[x_n\,\Delta_2 U - (n-2)\,\frac{\partial U}{\partial x_n}\Big]$$

dove, come di solito, si è posto $\Delta_2 = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Sicchè l'equazione di Laplace relativa allo spazio iperbolico assume la forma:

$$(\beta) \qquad (1 - \sum x_i^2)\,\Delta_2 U + 2\,(n-2)\sum x_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

o l'altra

$$(\beta') \qquad x_n \Delta_2 U - (n-2)\frac{\partial U}{\partial x_n} = 0$$

secondochè ci si riferisce all'una o all'altra rappresentazione.

Le equazioni (β), (β') sono naturalmente equivalenti, cioè riducibili l'una all'altra per una trasformazione di variabili (precisamente, una proiezione stereografica); sicchè ogni questione relativa ad una delle due equazioni può ridursi ad una relativa all'altra, almeno nei domini ove la trasformazione è regolare.

Per $n = 2$ le (β), (β') si riducono all'ordinaria equazione di Laplace; per $n > 2$ esse ne differiscono invece sostanzialmente, pur conservando con quella notevoli analogie, almeno sinchè si considerino in domini che non contengano punti della varietà limite (ipersfera o iperpiano), ossia in quei domini che corrispondono a domini limitati dello spazio iperbolico, e che chiameremo brevemente *domini di* 1ª *specie*. L'intima ragione di questa analogia è da ricercarsi nella possibilità di applicare allo spazio iperbolico le note formule di trasformazioni degli integrali multipli, ciò che risulta, come caso particolare, dalle classiche ricerche di Beltrami[1]). Questa formule, applicate alle soluzioni dell'equazione di Laplace dello spazio iperbolico, consentono di dimostrare per queste proprietà perfettamente analoghe a quelle delle ordinarie funzioni armoniche, e di applicare al relativo problema di Dirichlet gran parte dei metodi noti[2]).

In modo ancora più esauriente, la ragione dell'analogia va assegnata nel fatto che la (β) e la (β') ammettono, come l'equazione di Laplace dello spazio euclideo, un gruppo $\frac{n(n+1)}{2}$ volte infinito di trasformazioni in sè: quello delle trasformazioni conformi dello spazio euclideo che mutano in sè la varietà limite, e che sono le immagini dei movimenti dello spazio iperbolico.

Le cose mutano se le (β), (β') vengano considerate in domini che hanno sul contorno (*domini di* 2ª *specie*) o nell'interno (*domini di* 3ª *specie*) punti della varietà limite. Le equazioni presentano infatti sulla varietà limite una singolarità, annullandosi ivi i coefficienti dei termini di ordine massimo; esse mantengono però il tipo ellittico da una parte e dall'altra della varietà limite. Lo studio di equazioni siffatte, di tipo costante, ma con varietà singolari è, si può dire, ancora da fare; non sapremmo invero citare al riguardo che una nota di Bianchi[3]) nella quale viene determinata la soluzione della (β) regolare all'interno dell'ipersfera limite e che assume su questa valori prescritti, e una estesa Memoria di Tricomi[4]), dedicata

[1]) Sulla teorica generale dei parametri differenziali (Opere complete **2**, pag. 74).

[2]) cfr. Fubini, I principi fondamentali della teoria delle funzioni armoniche negli spazi di curvatura costante (Ann. R. Sc. Norm. Sup. di Pisa **9** (1902)).

[3]) Bianchi, Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 U = 0$ nello spazio indefinito non euclideo (Rend. Acc. Lincei, 5ª, **9** (1900)).

[4]) Tricomi, Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto (Mem. Acc. Lincei, 5ª, **14** (1923)).

propriamente alle equazioni alle derivate parziali del 2° ordine di tipo misto, ma che in parte si ricollega ai problemi qui accennati. L' equazione

$$Y\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}=0$$

che in quella Memoria viene accuratamente studiata, per $Y>0$ e cioè nel campo in cui essa presenta il tipo ellittico, si può infatti agevolmente trasformare nell' altra:

$$3y\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

che rientra appunto nel tipo di cui si è discorso. Su questa equazione l'A. è condotto a proporsi alcune questioni di valori al contorno per domini di 2ª specie; i domini sono però soggetti a una condizione assai restrittiva[5]), e i procedimenti non sembrano facilmente estendibili.

Poichè la grande varietà delle circostanze possibili rende certamente arduo ottenere sull' argomento risultati generali, non sembra inutile attualmente lo studio di qualche caso speciale, il quale presenti un certo interesse intrinseco e consenta, per qualche sua particolarità, l' uso di mezzi analitici abbastanza semplici. Tanto più se per la risoluzione delle questioni si cerchino procedimenti che posseggano qualche carattere di generalità.

Con questi criteri, dietro suggerimento del chiarissimo Prof. G. Fubini, a cui rendo qui vive grazie, ho intrapreso uno studio minuto dell' equazione (β'), che ho preferito alla (β) per qualche maggiore semplicità formale. Mi sono limitato al caso $n=3$, cioè all' equazione

$$(A)\qquad z\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial U}{\partial z}=0$$

però tutti i risultati relativi ai domini di 1ª e 2ª specie si estendono senza difficoltà al caso generale. Il caso è diverso per i domini di 3ª specie; i risultati esaurienti che si ottengono per $n=3$ non sussistono più nel caso $n>3$, nè possono essere sostituiti da altri egualmente semplici.

La presente Memoria può dividersi in quattro parti. Nella prima, con procedimento diretto, vengono dedotte per le soluzioni della (A) nei domini di 1ª specie formule analoghe a quelle di Green e di Gauss, e stabiliti i teoremi di unicità per i domini di 1ª e 2ª specie, con alcuni complementi

---

[5]) Resa più larga nella nota successiva: Nuove ricerche sull' equazione $y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=0$ (Rend. Circ. Mat. Palermo **52** (1928)). Recentemente l'A, utilizzando il metodo indicato nel cap. 4° della presente Memoria, ha potuto ottenere risultati molto generali, nei quali i contorni sono sottoposti soltanto a condizioni di carattere qualitativo [Ancora sull' equazione ecc. (Rend. Acc. Lincei, 6ª, **6** (1928))].

che qui si rendono opportuni. Nella seconda viene studiato brevemente, e cioè senza insistere su questioni che non presentano per il nostro scopo un interesse principale, il potenziale di doppio strato dello spazio iperbolico. Esso conduce alla risoluzione — tipo Fredholm — del problema di Dirichlet per i domini di 1ª specie, ed anche alla risoluzione esplicita dello stesso problema per due particolari domini di 2ª specie: l'intero semispazio $z \geqq 0$ (problema equivalente a quello risoluto da Bianchi) e una semisfera limitata dal piano $z = 0$ (immagine del semispazio iperbolico). Questo risultati sono fondamentali per il seguito.

Alla trattazione generale del problema dei valori al contorno per i domini di 2ª specie è dedicata la terza parte; in essa si parte dall'ipotesi che il problema sia risolubile per certe parti di 1ª specie del dato dominio di 2ª specie, e da condizioni molto generali per il contorno, e si perviene alla completa risoluzione del problema mercè un opportuno passaggio al limite. Il procedimento appare molto generale, l'equazione (A) intervenendo solo attraverso un gruppo di proprietà che è presumibile si verifichino in casi molto estesi.

L'ultima parte è dedicata ai domini di 3ª specie, e qui la particolare struttura della (A) interviene in modo decisivo, dando luogo a risultati molto semplici — analiticità delle soluzioni regolari, validità del teorema di unicità, impossibilità in generale del problema dei valori al contorno — di cui invano si cercherebbero gli analoghi nello studio di equazioni di poco differenti; i risultati stessi cadono già in difetto per il caso di più di tre variabili, cioè per la generale equazione (β'). Mi sembra ad ogni modo che la trattazione, per le questioni che involve e per il procedimento con cui esse si risolvono, non sia priva d'interesse.

L'approfondimento delle questioni relative ai domini di 3ª specie per il caso $n > 3$ oltrepassando di molto i limiti impostimi in questa Memoria, mi sono ristretto ad esaminare rapidamente nelle ultime pagine i fatti più salienti che si presentano in questo ordine di idee.

Essi si riducono in sostanza alla mancanza, in generale, di un legame analitico tra i valori di una soluzione da una parte e dall'altra della varietà limite, anche se su questa essa è regolare, nel senso da noi dato a questa parola; e alla indeterminazione presentata in generale dal problema dei valori al contorno. Ci sembra probabile che queste circostanze debbano essere la regola per le equazioni ellittiche del 2° ordine con varietà singolari, mentre quelle relative al caso $n = 3$ debbano rappresentare un caso eccezionale, indubbiamente molto interessante[6]).

---

[6]) Un brevissimo sunto del presente lavoro è comparso, col medesimo titolo, nei Rend. Acc. Lincei, 6ª, 7 (1928).

1. La soluzione elementare.

1. Considereremo nel seguito lo spazio iperbolico il cui elemento lineare è definito dall' espressione:

$$ds^{*2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}$$

e la sua rappresentazione conforme nel semispazio $z > 0$ che da essa risulta in modo evidente[7]). Porremo poi

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sicchè ds rappresenti l'elemento lineare dello spazio euclideo; e in generale distingueremo gli elementi relativi alla metrica iperbolica dai loro analoghi euclidei provvedendo i primi di un asterisco. Così tra gli elementi lineari, superficiali e di volume euclidei e non euclidei avremo le relazioni:

$$ds^* = \frac{ds}{z}, \qquad d\sigma^* = \frac{d\sigma}{z^2}, \qquad d\tau^* = \frac{d\tau}{z^3}.$$

E' noto che alle geodetiche dello spazio iperbolico (*rette*) nella rappresentazione adottata corrispondono le semicirconferenze aventi gli estremi sul piano $z = 0$ e ad esso ortogonali, e che perciò chiameremo brevemente *semicirconferenze geodetiche*. Analogamente, diremo *semisfere geodetiche* le semisfere terminate allo stesso piano, le quali sono imagini dei piani dello spazio iperbolico.

Quale espressione della distanza iperbolica tra due punti P, Q del semispazio $z > 0$ si ottiene facilmente la formula

$$\operatorname{th} \frac{r^*}{2} = \frac{r}{r_1}$$

dove $r = (PQ)$, $r_1 = (P_1 Q) = (P Q_1)$; P_1 e Q_1 indicano qui i simmetrici di P e Q rispetto al piano $z = 0$.

2. Ci sarà utile studiare alquanto minutamente la funzione:

$$\Omega(P, Q) = \operatorname{cth} r^* = \frac{1}{2}\left(\operatorname{th} \frac{r^*}{2} + \operatorname{cth} \frac{r^*}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_1} + \frac{r_1}{r}\right)$$

evidentemente simmetrica nei due argomenti P, Q.

Per P fisso, le superficie $\Omega(P, Q) = \text{cost.}$, per $z > 0$ sono i luoghi dei punti che hanno da P distanza iperbolica costante, e quindi sono le sfere che tagliano ortogonalmente le semisfere geodetiche passanti per P. Considerate in tutto lo spazio, le $\Omega(P, Q) = \text{cost.}$ costituiscono perciò un fascio di sfere, ortogonale alle ∞^2 sfere passanti per P e P_1. Ciò può confermarsi facilmente per via elementare, e cioè indipendentemente da ogni interpretazione non euclidea.

[7]) Per ciò che riguarda la geometria iperbolica si può vedere Bianchi, Geom. differenziale (Pisa, Spoerri, 1902), **1**, p. 419.

Sarà sufficiente considerare il semispazio $z > 0$. Per $\Omega < 1$ non si hanno luoghi reali; per $\Omega = 1$ il luogo si riduce al piano $z = 0$, per $\Omega = \infty$ al punto P. Se si danno ad Ω i valori Ω_1, Ω_2 maggiori di 1, ed è $\Omega_1 > \Omega_2$, si hanno due sfere tali che la prima contiene la seconda. Ne segue che il vettore $\text{grad}_Q\, \Omega$, che è normale alla sfera $\Omega = \text{cost.}$, è sempre rivolto in dentro, sicchè il suo modulo vale $\frac{d\Omega}{dn}$, dove n è la normale *interna* alla sfera nel punto Q.

Nel seguito avremo da usare più volte il valore di questa derivata normale; per calcolarla serve qui ottimamente l'algoritmo vettoriale. Si ha[8]):

$$\text{grad}_Q\, \Omega(P,Q) = \frac{1}{2}(r\, \text{grad}_Q\, r_1 - r_1\, \text{grad}_Q\, r)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_1^2}\right)$$

sicchè:

$$[\text{grad}_Q\, \Omega(P,Q)]^2$$

$$= \frac{(r^2 - r_1^2)^2}{4\, r^4 r_1^4}[r^2 (\text{grad}_Q\, r_1)^2 + r_1^2 (\text{grad}_Q\, r)^2 - 2\, r\, r_1\, \text{grad}_Q\, r \times \text{grad}_Q\, r_1]$$

$$= \frac{(r^2 - r_1^2)^2}{4\, r^4 r_1^4}[r^2 + r_1^2 - 2\, r\, r_1 \cos(P\, Q\, P_1)] = z_P^2 \frac{(r_1^2 - r^2)^2}{r^4 r_1^4}.$$

Ne segue una prima espressione di $\frac{d\Omega}{dn}$:

$$\frac{d\Omega}{dn} = z_P \frac{r_1^2 - r^2}{r^2 r_1^2}. \tag{1}$$

Avendosi facilmente:

$$r_1^2 - r^2 = 4\, z_P\, z_Q$$

questa può anche scriversi:

$$\frac{d\Omega}{dn} = \frac{4\, z_P^2\, z_Q}{r^2 r_1^2} \tag{1'}$$

e se si osserva poi che si ha:

$$\Omega^2 - 1 = \frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{r} - \frac{r}{r_1}\right)^2 = \frac{4\, z_P^2\, z_Q^2}{r^2 r_1^2}$$

si ottiene la seguente semplice formula:

$$\frac{d\Omega}{dn} = \frac{\Omega^2 - 1}{z_Q}. \tag{1''}$$

3. Anche nello spazio iperbolico si può, nei casi ordinari, attribuire ad un cono un determinato angolo solido ω^*; basta immaginare una sfera geodetica avente per centro il vertice P^* del cono e raggio arbitrario r^*, e considerare la sua intersezione σ^* con il cono; si porrà

$$\omega^* = \lim_{r^* \to 0} \frac{\sigma^*}{r^{*2}}$$

[8]) V. Burali Forti e Marcolongo, Calcolo vettoriale (Zanichelli, Bologna, 1909) pag. 63 e seguenti.

applicando alla figura, nell' intorno infinitesimo di P^*, la metrica euclidea. E potrà anche scriversi:

$$\omega^* = \lim_{r^* \to 0} \frac{\sigma^*}{\mathrm{sh}^2 r^*}.$$

Ora dalle formule della geometria iperbolica segue che il rapporto $\frac{\sigma^*}{\mathrm{sh}^2 r^*}$, per un dato cono, è indipendente da r^*, sicchè si ha senz' altro:

$$\omega^* = \frac{\sigma^*}{\mathrm{sh}^2 r^*}.$$

Per un cono infinitesimo si può scrivere:

$$d\omega^* = \frac{d\sigma^*}{\mathrm{sh}^2 r^*} = -\frac{d\,\mathrm{cth}\, r^*}{dr^*} d\sigma^* = \frac{d\,\mathrm{cth}\, r^*}{dn^*} d\sigma^*$$

dove n^* indica la normale interna all' elemento sferico. L' ultima espressione ha il vantaggio di potersi applicare a qualunque elemento superficiale orientato; il $d\omega^*$ deve allora considerarsi come positivo o negativo secondochè la normale forma angolo acuto od ottuso con la congiungente di P^* con un punto Q^* dell' elemento.

L' estensione si fa agevolmente, valendosi di una sezione ortogonale $d\sigma_1^*$ del cono in Q^*, legata a $d\sigma^*$ dalla relazione:

$$\frac{d\sigma_1^*}{d\sigma^*} = -\frac{dr^*}{dn^*}.$$

Concludendo, come espressione dell' angolo solido elementare determinato da un punto P^* e dall' elemento superficiale $d\sigma^*$ di normale n^*, assumiamo la seguente:

$$d\omega_P^* = \frac{d\,\mathrm{cth}\, r^*}{dn^*} d\sigma^*.$$

Introducendo in questa le espressioni euclidee degli elementi iperbolici, e cioè:

$$\mathrm{cth}\, r^* \equiv \Omega(P,Q), \qquad dn^* = \frac{dn}{z_Q}, \qquad d\sigma^* = \frac{d\sigma}{z_Q^3}$$

si ottiene l' altra:

$$d\omega_P^* = \frac{1}{z_Q} \frac{d\Omega(P,Q)}{dn} d\sigma \tag{2}$$

di cui faremo uso continuo.

La (2) si può trasformare in vari modi. Anzitutto, se t è la tangente all' arco geodetico QP, in Q, rivolta verso P, che dà la direzione del $\mathrm{grad}_Q \Omega$, si è visto che:

$$\frac{d\Omega(P,Q)}{dt} = \frac{4 z_P^3 z_Q}{r^2 r_1^2}$$

onde, per la direzione arbitraria n si ha:

$$\frac{d\Omega(P,Q)}{dn} = \frac{4 z_P^3 z_Q}{r^2 r_1^2} \cos(n\,t)$$

e sostituendo nella (2):

$$(3) \qquad d\omega_P^* = \frac{4 z_P^3 z_Q}{r^2 r_1^2} \cos(n\,t)\, d\sigma .$$

D'altra parte ponendo nella (2) per $\Omega(P, Q)$ il suo valore, si ottengono senza difficoltà le formule:

$$(3') \qquad d\omega_P^* = \frac{2 z_P}{r^2 r_1^2}\left(r \frac{dr_1}{dn} - r_1 \frac{dr}{dn}\right) d\sigma,$$

$$(3'') \qquad d\omega_P^* = 2 z_P \left(\frac{1}{r_1} \frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r} \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}\right) d\sigma .$$

Le (3), (3'), (3'') hanno significato qualunque siano i punti P, Q, purchè distinti, e qualunque sia l'orientazione n, e quindi possono costituire una definizione del $d\omega_P^*$ indipendente da qualunque considerazione geometrica, e valida in tutti i casi; le (3') e (3'') anzi in modo più nettamente analitico.

Risulta da esse la proprietà:

$$d\omega_{P_1}^* = d\omega_P^*$$

e si vede anche che $d\omega_P^* = 0$ se P giace sul piano $z = 0$.

Una trattazione geometrica diretta della questione non è del resto priva di interesse; ne diamo un rapido cenno.

Al cono geodetico dello spazio iperbolico determinato dal punto P^* dello spazio iperbolico con l'elemento superficiale $d\sigma^*$ di normale n^* corrisponde nella rappresentazione conforme un «pennello» infinitesimo di circonferenze geodetiche uscenti da P (e P_1); l'angolo solido iperbolico cercato coincide con l'angolo solido euclideo del «pennello» cioè del cono delle sue tangenti. Per il calcolo di questo angolo solido si presenta opportuna una inversione che muti il «pennello» di semicirconferenze geodetiche in un cono ordinario; serve a tale scopo l'inversione di polo P_1 e potenza $4 z_P^2$ che muta P nella sua proiezione P' sul piano $z = 0$. Un elemento superficiale $d\sigma$ normale all'arco geodetico PQ viene trasformato in un elemento $d\sigma'$, normale al segmento $P'Q'$; onde è

$$d\omega_P^* = \frac{d\sigma'}{(P'Q')^2} .$$

Esprimendo il secondo membro per mezzo dei dati, mediante le formule dell'inversione si ottiene facilmente

$$d\omega_P^* = \frac{4 z_P^2}{r^2 r_1^2} d\sigma .$$

Di qui si ottiene subito, per il caso generale, la (3). Questo procedimento ci sarà utile più avanti.

Se $z_Q = 0$, l'elemento essendo comunque orientato, le (3), (3′) danno, direttamente, o mercè le espressioni

$$r^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2$$
$$r_1^2 = (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P + z_Q)^2$$

con facile calcolo:

$$d\omega_P^* = \frac{4 z_P^2}{r^4} \cos(n z) = \frac{4 z_P^2}{r^4} \frac{dz_Q}{dn} d\sigma . \tag{4}$$

4. L'analogia dell'espressione iperbolica per $d\omega_Q^*$ con una nota formula della teoria del potenziale giustifica la supposizione che $\operatorname{cth} r^*$, come funzione di uno dei suoi argomenti, per es. P, soddisfi all'equazione:

$$\Delta^* U = 0 .$$

Che il fatto sussista può accertarsi senza difficoltà col calcolo diretto, partendo dalla formula esplicita:

$$\operatorname{cth} r^* = \Omega(P, Q) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_1} + \frac{r_1}{r}\right).$$

Si giunge del resto facilmente a una dimostrazione indiretta procedendo alquanto nell'accennata analogia. Come nello spazio euclideo, vale nell'iperbolico, secondo Beltrami, la relazione integrale:

$$\int_{\tau^*} \Delta^* U \, d\tau^* = -\int_{\sigma^*} \frac{dU}{dn^*} d\sigma^*$$

nella quale τ^* è un dominio regolare, σ^* il suo contorno, n^* la normale interna, U una funzione continua in τ^* insieme alle sue derivate prime e seconde. Se in questa formula si pone, come è lecito, $U = \operatorname{cth} r^*$, dove r^* è la distanza iperbolica tra un punto fisso P^*, esterno a τ^* e il punto generico Q^* di τ^* si ha:

$$\int_{\tau^*} \Delta^* \operatorname{cth} r^* \, d\tau^* = -\int_{\sigma^*} \frac{d \operatorname{cth} r^*}{dn^*} d\sigma^* = -\int_{\sigma^*} \frac{d\omega_P^*}{d\sigma^*} d\sigma^* .$$

Ora per una superficie chiusa σ^*, e a noi basta anzi affermarlo per una sfera, ciò che può farsi con pieno rigore, l'integrale che comparisce nel secondo membro, e che può scriversi $\int d\omega_P^*$, è nullo, P^* essendo esterno a τ^*, sicchè si ha anche

$$\int_{\tau^*} \Delta^* \operatorname{cth} r^* \, d\tau^* = 0$$

e valendo questo per ogni sfera τ^*, segue identicamente $\Delta^* \operatorname{cth} r^* = 0$.

Passando di qui alla rappresentazione conforme, possiamo ormai dire di aver ottenuto per l'equazione

$$z \Delta_2 U - \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \tag{A}$$

la *soluzione elementare*

$$\Omega(P,Q) = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_1} + \frac{r_1}{r}\right);$$

se si tiene fisso Q, essa è funzione sempre regolare delle coordinate di P, salvo nei punti Q e Q_1, ove essa diviene infinita di 1° ordine rispetto alla distanza r.

2. I teoremi di Green e di Gauss e le loro conseguenze.

5. Vogliamo ora studiare l'equazione

$$(A) \qquad z\,\Delta_2 U - \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

nei domini di 1ª specie, e precisamente in quei domini che sono contenuti nel semispazio $z > 0$.

Essendo sempre $z \neq 0$, alla (A) può darsi la forma

$$L(U) \equiv \frac{1}{z}\,\Delta_2 U - \frac{1}{z^2}\,\frac{\partial U}{\partial z} = 0;$$

si riconosce facilmente che l'espressione $L(U)$ è autoaggiunta.

Sia anzitutto τ un dominio[9]) regolare del semispazio, tale cioè che il suo contorno σ possegga ovunque piano tangente determinato, fatta eccezione, al più, di un numero finito di punti o di linee regolari. Siano poi U, V due funzioni sempre definite e continue in τ e su σ insieme alle loro derivate parziali prime e seconde pure. In tali condizioni, che consideriamo per ora come condizioni di *regolarità*, rispetto all'operazione L (in seguito potremo rinunziare alla continuità delle derivate seconde) l'integrale di volume

$$\int_\tau [U\,L(V) - V\,L(U)]\,d\tau$$

può trasformarsi, come è noto, in un integrale superficiale, esteso al contorno σ del dominio. Si ottiene precisamente:

$$\int_\tau [U\,L(V) - V\,L(U)]\,d\tau = -\int_\sigma \frac{1}{z}\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{dU}{dn}\right)d\sigma$$

equazione che possiamo considerare come l'espressione del *lemma di Green* per l'operazione L.

In particolare, se U e V sono soluzioni regolari della (A), si avrà

$$(1) \qquad \int_\sigma \frac{1}{z}\,U\left(\frac{dV}{dn} - V\,\frac{dU}{dn}\right)d\sigma = 0.$$

[9]) Qui e in seguito, per brevità, con la parola *dominio* intenderemo *dominio limitato*.

Ancora più particolarmente, per $V = 1$ si ha:

$$\int_\sigma \frac{1}{z} \frac{dU}{dn} d\sigma = 0 \tag{2}$$

e per $V = \Omega(P, Q)$, P essendo un punto fisso esterno a τ, Q un punto variabile in τ:

$$\int_\sigma \frac{1}{z} \left(U \frac{d\Omega}{dn} - \Omega \frac{dU}{dn} \right) d\sigma = 0 . \tag{3}$$

Dalla prima, per $U = \Omega$:

$$\int_\sigma \frac{1}{z} \frac{d\Omega}{dn} d\sigma = 0 \tag{4}$$

equazione che traduce l'altra, in termini non euclidei,

$$\int_{\sigma^*} \frac{d \operatorname{cth} r^*}{dn^*} d\sigma^* = 0$$

già incontrata al n° 4.

Da queste formule, mediante un procedimento ben noto, si deduce la *formula di Green* per le soluzioni della (A):

$$4\pi U(P) = \int_\sigma \frac{1}{z_Q} \left[U(Q) \frac{d\Omega(P, Q)}{dn} - \Omega(P, Q) \frac{dU(Q)}{dn} \right] d\sigma \tag{5}$$

la quale esprime il valore di una soluzione in un punto P interno a τ, quando siano noti i valori assunti sul contorno da essa e dalla sua derivata normale. Il procedimento viene alquanto semplificato, come è prevedibile, se, invece di togliere da τ una piccola sfera di centro P, si toglie una sfera di cui P sia centro nella metrica iperbolica, o *pseudocentro*.

Tenuto conto che $\Omega(P, Q)$ e quindi $\frac{d\Omega(P, Q)}{dn}$, come funzioni di P, sono analitiche, si conclude che *le soluzioni della* (A) *regolari in un dominio di* 1ª *specie sono analitiche.*

6. Se si applica la formula di Green ad una sfera del semispazio $z > 0$ e al suo pseudocentro P, e si osserva che su questa sfera $\Omega(P, Q)$ conserva un valore costante Ω_0, si ottiene:

$$4\pi U(P) = \int_\sigma \frac{1}{z_Q} U(Q) \frac{d\Omega(P, Q)}{dn} d\sigma - \Omega_0 \int_\sigma \frac{1}{z_Q} \frac{dU(Q)}{dn} d\sigma$$

e per la (2):

$$4\pi U(P) = \int_\sigma \frac{1}{z_Q} U(Q) \frac{d\Omega(P, Q)}{dn} d\sigma$$

formula che esprime il *teorema di Gauss* per le soluzioni dell'equazione (A).

Esso ammette anche altre espressioni semplici, in virtù delle varie formule trovate al n° 2 per la $\frac{d\Omega}{dn}$. Si ha così:

$$(6') \quad U(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_\sigma \frac{U(Q)}{r^2 r_1^2} d\sigma ; \qquad (6'') \quad U(P) = (\Omega_0^2 - 1) \int_\sigma U(Q) \frac{d\sigma}{z_Q^2}.$$

Se nell'ultima formula si fa $U = 1$ si trova

$$1 = (\Omega_0^2 - 1) \int_\sigma \frac{d\sigma}{z_Q^2}$$

sicchè può anche scriversi:

$$(6''') \qquad U(P) \int_\sigma \frac{d\sigma}{z_Q^2} = \int_\sigma U(Q) \frac{d\sigma}{z_Q^2}$$

od anche:

$$U(P) \int_{\sigma^*} d\sigma^* = \int_{\sigma^*} U(Q)\, d\sigma^*$$

e si rende così manifesta la perfetta analogia del risultato ottenuto col *teorema della media* dato da Gauss per le funzioni armoniche.

È noto come dal teorema della media sia stato quasi contemporaneamente da Boggio e Zaremba [10]) tratto un interessante corollario il quale afferma che il valore di una funzione armonica nel centro di una sfera è la media dei suoi valori nell'interno della sfera.

Ciò può essere trasportato anche alle soluzioni della (A); assumendo infatti come elemento di volume quello determinato da due sfere $\Omega(P, Q) = \text{cost.}$ infinitamente vicine, e da un «pennello» di cerchi geodetici uscenti da P, si ha

$$d\tau = d\sigma\, dn$$

dove dn è l'elemento di arco del cerchio geodetico, od anche

$$d\tau = -\frac{z_Q}{\Omega^2 - 1} d\sigma\, d\Omega$$

per la (1'') del n° 2; sicchè dalla (6'''), moltiplicata per $\frac{d\Omega}{\Omega^2 - 1}$ e integrata tra Ω_0 e ∞ si ha:

$$(7) \quad U(P) \int_{\Omega_0}^{\infty} \frac{d\Omega}{\Omega^2 - 1} \int_\sigma \frac{d\sigma}{z_Q^2} = \int_{\Omega_0}^{\infty} \frac{d\Omega}{\Omega^2 - 1} \int_\sigma U(Q) \frac{d\sigma}{z_Q^2}; \quad U(P) \int_\tau \frac{d\tau}{z_Q^3} = \int_\tau U(Q) \frac{d\tau}{z_Q^3}$$

che esprime la conseguenza annunziata.

---

[10]) Boggio, Trasformazione di alcune funzioni potenziali (Rend. Palermo, 1906). — Zaremba, Sur l'intégration de la fonction biharmonique (Bull. Acc. Cracovie, 1908).

7. È evidente che i teoremi precedenti ammettono per le soluzioni della (A) le stesse conseguenze come i loro analoghi per le funzioni armoniche, e cioè il teorema di unicità per la soluzione regolare in un dominio di prima specie che assume al contorno valori prescritti, e le proprietà connesse. Ed anzi tali teoremi possono essere enunciati anche per i domini di seconda specie, in quanto il loro fondamento comune risiede nella non esistenza di massimi o di minimo in punti *interni* al dominio. Abbiamo dunque:

a) *Una soluzione della* (A), *regolare nell' interno di un dominio di* 1ª *o* 2ª *specie, non ammette nell' interno del dominio punti di massimo o di minimo.*

b) *Se una soluzione della* (A), *è regolare nell' interno di un dominio di* 1ª *o* 2ª *specie, ed è continua al contorno, ogni suo valore è compreso tra il massimo e il minimo dei valori che essa assume al contorno.*

c) *Se una soluzione della* (A) *è regolare nell' interno di un dominio di* 1ª *o* 2ª *specie, ed è continua al contorno, ove è ovunque nulla, essa è identicamente nulla in tutto il dominio.*

d) *Se due soluzioni della* (A) *sono regolari nell' interno di un dominio di* 1ª *o* 2ª *specie e sono continue al contorno, ove assumono gli stessi valori, esse coincidono identicamente in tutto il dominio.*

Può rendersi necessario dimostrare questi teoremi anche nel caso in cui i valori al contorno presentino discontinuità nei punti di certi insiemi, le soluzioni essendo in tal caso supposte per di più *limitate*. Di questa questione abbiamo avuto occasione di occuparci in una recente Nota [11]) dove è stabilito un risultato di molta generalità — forse tutta la generalità possibile — riguardante le funzioni armoniche, ma applicabile immediatamente a tutte le equazioni a derivate parziali lineari, di tipo ellittico, nei domini per i quali valgono per esse i precedenti teoremi a) b) c) d). In particolare esso vale per la (A), in tutto il semispazio $z > 0$.

Richiamiamo brevemente questo risultato, nella parte che è utile al nostro scopo. Relativamente ad un dato dominio, di prima o seconda specie, diremo *insieme di specie Z*, per l' equazione (A), un insieme I di punti del contorno σ di τ, tale che esista una soluzione $g_I(P)$ della (A), positiva e continua in τ e su σ, salvo nei punti di I, ove essa è infinita; tale cioè che $\frac{1}{g_I(P)}$ sia continua in τ, contorno incluso, nulla nei punti di I, positiva altrove.

---

[11]) Sull' unicità della soluzione nel problema di Dirichlet, Rend. Acc. Lincei, 6ª, **8** (1928).

Ciò posto: *le conclusioni dei teoremi* b) c) d) *valgono anche quando le soluzioni che in essi si considerano si suppongono limitate, regolari nei punti interni e continue al contorno, salvo al più nei punti di un insieme di tipo Z.*

L'interesse di questa proposizione è naturalmente subordinato alla conoscenza della natura degli insiemi Z. Ora pur non essendo in grado di assegnare un equivalente topologico-metrico della loro definizione, possiamo affermare per lo meno che sono di tipo Z tutti quegli insiemi a cui si fa allusione di solito quando si dice che una proprietà è *generalmente* verificata nel contorno di un dominio. Si dimostra infatti che per un dominio di 1ª e 2ª specie sono insiemi Z, se situati nel semispazio $z > 0$:

a) un punto A, potendo porsi per esso $g_I(P) = \Omega(A, P)$;

b) un insieme di punti $A_1, A_2, \ldots, A_n$, in numero finito; si porrà $g_I(P) = \sum \Omega(A_i, P)$;

c) un insieme numerabile e chiuso $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$; si porrà $g_I(P) = \sum \varepsilon_i \Omega(A_i, P)$ essendo $\sum \varepsilon_i$ una serie convergente a termini positivi;

d) una linea l rettificabile; si potrà prendere per $g_I(P)$ il potenziale iperbolico della linea, di densità 1, e cioè:

$$g_I(P) = \int_l \Omega(P, Q(s))\, ds;$$

e) la riunione di un numero finito di insiemi dei tipi precedenti.

Per le dimostrazioni non v'è che da seguire, con qualche leggera modificazione, quanto è detto nella nota citata per le funzioni armoniche.

Un caso nuovo si ha invece per gli insiemi eccezionali situati sul piano $z = 0$. Le conclusioni sono le medesime, riuscendo però assai meno semplice la costruzione delle corrispondenti soluzioni $g_I(P)$. Così, se I si riduce a un punto M del piano $z = 0$, conviene ricercare quella soluzione della (A) che è regolare nel semispazio $z > 0$, nulla all'infinito, continua in ogni punto Q del piano $z = 0$, diverso da M, ove assume il valore $\frac{1}{(MQ)}$, soluzione che, come vedremo, è espressa dall'*integrale di Bianchi* (n° 18, 19):

$$g_M(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_{\pi_0} \frac{1}{\varrho} \frac{d\pi_0}{r^4}$$

esteso all'intero piano π_0; in esso è $d\pi_0$ l'elemento d'area adiacente al punto Q, $\varrho = (MQ)$, $r = (PQ)$. Esso può anche scriversi:

$$g_M(P) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\omega_P^*}{\varrho}$$

indicando con $d\omega_P^*$ l'angolo solido iperbolico che P determina con $d\pi_0$ [n° 3, (4)]. Per le proprietà di questo integrale possiamo rimandare alla apposita trattazione; dobbiamo solo qui dimostrare il suo comportamento in M, che non risulta dalla teoria generale. Si noti anzitutto che $g_M(P)$, per $z_P > 0$, è finito, come risulta dall'introduzione di coordinate polari:

$$g_M(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \iint \frac{d\varrho\, d\theta}{r^4}.$$

Detto poi c un cerchio di raggio a e centro M sul piano $z = 0$, σ la semisfera geodetica costruita su di esso, si ha, se P è preso su σ:

$$g_M(P) > \frac{z_P^2}{\pi} \int_c \frac{1}{\varrho} \frac{d\pi_0}{r^4} > \frac{1}{a} \cdot \frac{z_P^2}{\pi} \int_c \frac{d\pi_0}{r^4} = \frac{1}{4\pi a} \frac{4 z_P^2}{\pi} \int_c \frac{d\pi_0}{r^4} = \frac{1}{4\pi a} \omega_P^* = \frac{1}{2a}$$

essendosi messo in evidenza l'angolo solido iperbolico ω_P^* che P determina con c, e che vale 2π. Dunque, in generale

$$g_M(P) > \frac{1}{2 \cdot (MP)}$$

ciò che dimostra che $g_M(P)$ per $P \to M$ diviene infinita.

Se I è una linea rettificabile l del piano $z = 0$, si può ormai procedere come nel caso generale, e cioè porre:

$$g_l(P) = \int_l g_M(P)\, ds,$$

si ha infatti, in virtù della disuguaglianza trovata per $g_M(P)$:

$$g_l(P) > \frac{1}{2} \int_l \frac{ds}{(MP)}$$

dove il secondo membro è un potenziale ordinario di linea.

Ci siamo intrattenuti su questi casi per solo desiderio di compiutezza; del resto nel seguito questi resultati non si applicheranno mai, o in modo affatto inessenziale [11a]).

8. I teoremi di media di Gauss e di Boggio-Zaremba sono, sotto condizioni estremamente larghe, proprietà caratteristiche per le funzioni armoniche; come è stato infatti dimostrato da E. E. Levi [12]), per la seconda

[11a]) È da avvertire che, nel caso delle funzioni armoniche, un' altra condizione per la validità del teorema di unicità, di carattere molto generale, è stata data da O. D. Kellogg nella sua relazione sul problema di Dirichlet (Bull. Amer. Math. Soc., 1926) e in altri lavori. Precisamente, l' insieme eccezionale vi è supposto di capacità nulla. È probabile che questo risultato possa estendersi alle soluzioni della (A); ad ogni modo l' applicazione della mia nota citata è qui assai più rapida ed elementare.

[12]) E. E. Levi, Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche (Rend. Lincei, 5ª, **18**, (1909)). V. Anche sullo stesso argomento le note di Tonelli e Volterra (id. id.).

proprietà è sufficiente l'integrabilità della funzione (secondo Lebesgue) in ogni sfera contenuta nel dominio che si considera; per la prima occorre anche l'integrabilità superficiale su ogni superficie sferica contenuta nel dominio. Recentemente Bouligand[13]), valendosi dell'integrale di Poisson, ha portato alla dimostrazione di Levi una semplificazione notevole.

È prevedibile che analoghe circostanze valgano per le proprietà di media da noi riscontrata per le soluzioni della (A) nei domini di 1ª specie; e si può infatti con opportune modificazioni ripetere la dimostrazione di Levi. Quanto a quella di Bouligand, essa si applica letteralmente alla (A), quando si ammetta che *il problema dei valori al contorno sia risoluto per la* (A) *per i domini sferici di* 1ª *specie.* Come si vedrà in seguito, a tali domini è applicabile sia il metodo di Neumann che quello di Fredholm; il risultato può dunque considerarsi come stabilito anche per questa via.

9. Nel n° 5 abbiamo assunto quali condizioni di regolarità di una soluzione della (A) l'esistenza e continuità delle sue derivate prime e derivate seconde pure, ciò che ci ha permesso, seguendo la via ormai classica, la deduzione dei teoremi di Green e di Gauss e delle loro conseguenze, e, in particolare, dell'analiticità delle soluzioni.

Poichè però la continuità delle derivate seconde non è necessaria perchè il primo membro della (A) abbia significato, vi può essere interesse a dimostrare che questa condizione è sovrabbondante, e cioè che *una funzione che ammette derivate prime e seconde pure* (quest'ultime non necessariamente continue) *che soddisfano alla* (A), *in un dominio di* 1ª *specie, è analitica.*

Per questo dimostreremo anzitutto nuovamente il teorema di unicità, nelle nuove condizioni, mediante un procedimento assai noto[14]). Si osservi anzitutto che se una funzione $U(x, y, z)$ è continua in un dominio τ e ammette nell'interno derivate prime e seconde pure determinate e finite, e nel punto interno (x_0, y_0, z_0), ha un massimo, si ha, per h abbastanza piccolo:

$$\frac{U(x_0+h, y_0, z_0)+U(x_0-h, y_0, z_0)-2\,U(x_0, y_0, z_0)}{h^2} \leqq 0$$

donde, per $h \to 0$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0, z_0} \leqq 0.$$

---

[13]) In mancanza di precise indicazioni attribuiamo a Bouligand la dimostrazione data da questo A. nella monografia: Fonctions harmoniques (fasc. XI del Mémorial des Sc. Math., Paris, 1926).

[14]) Cfr. per es., la Memoria di Paraf, Sur l'extension du problème de Dirichlet etc. (Ann. Toulouse 6 (1892)), e per procedimenti analoghi: Picone, Esercit. Circ. Mat. Catania 1 (1921).

In modo analogo:

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0, z_0} \leqq 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)_{x_0, y_0, z_0} \leqq 0$$

e quindi

$$(\Delta_2 U)_{x_0, y_0, z_0} \leqq 0 .$$

In un punto di minimo sarà invece $\Delta_2 U \geqq 0$.

Sia ora $U(x, y, z)$ una soluzione della (A) sottoposta alle citate condizioni, la quale si annulli sul contorno di un dominio τ di 1ª specie. Posto $U = z V$, la V si annullerà ancora al contorno e verificherà l'equazione:

$$z^2 \Delta_2 V - z \frac{\partial V}{\partial z} - V = 0 .$$

Se V non è identicamente nulla, avrà entro τ un massimo positivo o un minimo negativo, od entrambi. Ma in un massimo positivo è

$$\Delta_2 V \leqq 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad V > 0,$$

in un minimo negativo:

$$\Delta_2 V \geqq 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad V < 0$$

e in ambo i casi la conclusione è assurda. La V é quindi identicamente nulla e così la U.

Il procedimento non è applicabile ai domini di 2ª specie; questo difetto si evita ponendo, con Paraf, $U = (a^2 - x^2) V$, dove a è una costante abbastanza grande perchè in tutto τ sia $a^2 - x^2 > 0$. Si trova per V l'equazione:

$$z(a^2 - x^2) \Delta_2 V - 4 x z \frac{\partial V}{\partial x} - (a^2 - x^2) \frac{\partial V}{\partial z} - 2 z V = 0$$

che consente l'identico ragionamento.

La questione posta in principio di questo n° si risolve ora rapidamente quando ci si valga della già menzionata possibilità di risolvere il problema di Dirichlet per la (A) nei domini sferici di prima specie ed anzi del fatto che il metodo di Fredholm dà la soluzione sotto una forma (potenziale iperbolico di doppio strato) che ne assicura senz'altro l'analiticità. Sia infatti, al solito, $U(P)$ una funzione definita in un dominio τ di 1ª specie, la quale possieda derivate prime e seconde pure soddisfacenti alla (A). Sia τ' una sfera interna a τ, $V(P)$ la soluzione della (A) che coincide con $U(P)$ sul contorno della sfera τ', e che è data dal metodo di Fredholm. La funzione $U(P) - V(P)$ ha pure in τ' derivate prime e seconde pure che soddisfano alla (A), e si annulla al contorno; per la dimostrazione precedente è in tutto τ', $U(P) = V(P)$, quindi $U(P)$ è analitica in τ', cioè, data l'arbitrarietà di τ', in tutto τ.

Dopo ciò, sciogliendo così la riserva posta al n° 5, possiamo rinunziare, nel porre le condizioni di regolarità, alla continuità delle derivate seconde pure. Tale rinunzia non ha come si vede, interesse fondamentale nel caso di domini di 1ª specie; abbiamo ad ogni modo tenuta a porla esplicitamente perchè in seguito, nello studio dei domini di 3ª specie, che ha un carattere di essenziale novità, i risultati siano ottenuti nelle condizioni più larghe che il problema consente.

10. Come si è detto nell'*Introduzione*, l'equazione (A) è equivalente all'altra

$$(B) \qquad (1-x^2-y^2-z^2)\,\Delta_2 U + 2\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}\right) = 0$$

per la quale ha ufficio di superficie limite o singolare la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

A questa equazione si possono quindi trasportare tutti i risultati sinora raggiunti; le formule relative sono solo alquanto più complicate. La (B) si presenta invece più semplice quando si vogliano studiare domini che pur essendo contenuti nel semispazio $z > 0$, si estendano all'infinito. La proiezione stereografica che muta la (A) nella (B) trasforma infatti il dominio in uno formato di punti della sfera unità, i punti all'infinito venendo tutti a trasformarsi nel polo dell'inversione. Tali domini debbono dunque considerarsi in ogni caso come di 2ª specie.

Ben inteso, se per le soluzioni che si considerano nei detti domini illimitati si ammettessero le condizioni più generali, per es. il tendere a limiti diversi nelle varie direzioni, dopo la trasformazione si potrebbero ottenere nel polo singolarità molto complesse, e il vantaggio sarebbe illusorio; ma se, come si fa di solito nella teoria del potenziale, si considera l'infinito dal punto di vista della geometria conforme, e si ammette che le soluzioni della (A) abbiano all'infinito un valore unico e determinato (nel senso ben noto), con la trasformazione si ottengono soluzioni della (B) aventi nel polo d'inversione valore determinato, e continue in questo punto. Possiamo per questa via riconoscere dunque che nelle condizioni poste, si possono applicare ai domini infiniti molte delle conclusioni trovate per i domini limitati, con l'unica inclusione del punto all'infinito tra i punti di contorno.

Noi avremo del resto una sola volta occasione di occuparci di domini infiniti; e precisamente studiando il teorema di esistenza per l'intero semispazio $z \geqq 0$, corrispondente al teorema di esistenza per la (B), relativo alla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; teorema dovuto al Bianchi, come si è avvertito nell'*Introduzione*. Possiamo dunque sin d'ora affermare che dati i valori assunti da una soluzione nel piano $z = 0$ e all'infinito, la soluzione è univocamente determinata in tutto il semispazio $z > 0$ (e così nel semispazio opposto).

3. Il potenziale iperbolico di doppio strato e le sue applicazioni.

11. L'analogia tra la soluzione elementare della (A):

$$\Omega(P, Q) = \operatorname{cth} r^* = \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_1} + \frac{r_1}{r}\right)$$

e quella, $\frac{1}{r}$, dell'ordinaria equazione di Laplace, ci conduce naturalmente alla considerazione delle *funzioni potenziali* dello spazio iperbolico, relative a distribuzioni di linea, di superficie, di volume, o a doppi strati. Per il nostro scopo sarà sufficiente studiare alquanto i potenziali di doppio strato, ai quali sarà da attribuire la forma:

$$W(P) = \int_{\sigma^*} \mu_Q \frac{d \operatorname{cth} r^*}{dn^*} d\sigma^* = \int_{\sigma} \frac{\mu_Q}{z_Q} \frac{d\Omega(P,Q)}{dn} d\sigma$$

supposto che la superficie regolare σ sia interamente situata in uno dei semispazi $z > 0$, $z < 0$; quanto al *momento* μ_Q esso sarà in generale supposto funzione continua del punto Q generico di σ. La (1) si può scrivere, con i simboli consueti, e con perfetta analogia con il caso euclideo:

$$W(P) = \int_{\sigma} \mu_Q \frac{d\omega_P^*}{d\sigma} d\sigma = \int \mu_Q d\omega_P^*$$

e in questa forma preferiamo considerarla, in quanto essa consente di assegnare alla superficie σ qualunque posizione rispetto al piano $z = 0$. Al $d\omega_P^*$ abbiamo infatti dato significato per ogni posizione di P e del $d\sigma$ (purchè non appartenentisi) mediante le formule (3), (3′), (3″) del n° 3.

Ad esse corrispondono altrettante formule per la $W(P)$, e cioè

$$(1'') \quad \begin{cases} W(P) = \int_{\sigma} \mu_Q \frac{4 z_P^2}{r^2 r_1^2} \cos(nt)\, d\sigma, \quad W(P) = \int_{\sigma} \mu_Q \frac{2 z_P}{r^2 r_1^2}\left(r \frac{dr_1}{dn} - r_1 \frac{dr}{dn}\right) d\sigma, \\ W(P) = \int_{\sigma} 2 z_P \mu_Q \left(\frac{1}{r_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}\right) d\sigma. \end{cases}$$

Da ognuna di queste forme risulta subito che in ogni dominio che non contenga punti di σ nè della sua immagine σ_1 la $W(P)$ è continua, ed anzi analitica $\left(\text{tali essendo } \frac{1}{r}, \frac{1}{r_1}\right)$. Essa è inoltre in un tale dominio soluzione regolare della (A); ciò è evidente nel caso in cui la $W(P)$ possa ricevere la forma (1), giacchè $\Omega(P, Q)$ è soluzione regolare della (1) nel dominio considerato; e potrebbe verificarsi in generale provando che è soluzione della (A) la funzione:

$$f(P) = 2 z_P \left(\frac{1}{r_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}\right)$$

che comparisce nella terza delle espressioni (1''). Ma il calcolo può evitarsi osservando che soddisfa alla (A), per $z_Q \neq 0$, la

$$\frac{1}{z_Q}\frac{d\,\Omega(P,Q)}{dn} = 2\,z_P\left(\frac{1}{r_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} - \frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn}\right)$$

e poichè essa è funzione analitica di tutti gli argomenti, vi soddisferà pure il suo limite per $z_Q \to 0$, che è precisamente il valore del secondo membro per $z_Q = 0$.

Ricordando infine che $d\omega^*_{P_1} = d\omega^*_P$ concludiamo che $W(P) = W(P_1)$ cioè che $W(P)$ è funzione pari di z_P.

12. La considerazione geometrica indicata al n° 3 per la determinazione diretta del $d\omega^*_P$ può essere utile anche per il calcolo dei potenziali iperbolici di doppio strato. Supposto infatti $z_P \neq 0$, e applicata alla figura l'inversione di polo P_1 e potenza $4z_P^2$, la quale porta σ in σ', P in P' (proiezione di P sul piano $z = 0$) Q in Q', il $d\omega^*_P$ coincide con l'ordinario angolo solido $d\omega'$ che P' determina con ds'; sicchè si ha

$$W(P) = \int \mu_Q\, d\omega^*_P = \int \mu'_{Q'}\, d\omega'$$

dove $\mu'_{Q'}$ è lo stesso μ_Q espresso mediante le nuove variabili. Il potenziale iperbolico si muta così in un potenziale euclideo, essendo P' il punto potenziato e σ' (*dipendente da* P) la superficie su cui è deposto il doppio strato.

Questa trasformazione può essere utile per sfruttare nello studio dei potenziali iperbolici qualche risultato noto dall'ordinaria teoria del potenziale. Un'applicazione importante è, per esempio, la seguente. Si voglia definire il valore di $W(P)$ quando P giace su σ, ciò che in modo noto si fa asportando da σ un intorno di P che si fa poi tendere a zero in ogni sua dimensione; la trasformazione conduce a un procedimento analogo per σ', il doppio strato essendo euclideo, e si rendono così applicabili i risultati di Neumann, Liapounoff, Plemelj, ecc.[15]) i quali assicurano l'esistenza del limite cercato sotto condizioni assai larghe per la superficie σ', che si traducono in condizioni ugualmente larghe per la σ. Ma tale ordine di idee non intendiamo qui approfondire, in quanto esso ha ufficio secondario rispetto agli intenti di questa Memoria; per lo studio delle questioni relative ai domini di 2ª e 3ª specie è infatti sufficiente, come si vedrà, la considerazione di casi particolari semplicissimi, in cui quelle condizioni sono verificate in modo evidente.

---

[15]) Cfr., per la bibliografia, l'articolo di Lichtenstein sulla teoria del potenziale nell'Enciclopedia (ed. tedesca) e per un'accurata esposizione: Korn, Potentialtheorie, B. 1, 1. Abs., 2. Kap.

È da notare che la trasformazione indicata perde la sua validità per $z_P = 0$; in tal caso però, essendo $d\omega_P^* = 0$ è anche $W(P) = 0$, e ciò anche se P appartiene a σ.

13. Se il momento μ_Q del doppio strato vale costantemente 1, la funzione $W(P)$ si riduce all'angolo solido iperbolico ω_P^* determinato da P e da σ; e questo coincide, con le notazioni del n° precedente, con l'angolo solido euclideo determinato da P' e σ'. Ciò permette di ottenere senza calcolo il valore di ω_P in alcuni casi interessanti.

a) Sia σ il contorno di un dominio τ situato nel semispazio $z \geqq 0$, e P nello stesso semispazio. Poichè il centro d'inversione è esterno a τ, la posizione di P rispetto a τ è la stessa di P' rispetto a τ'; onde:

Se P è interno a τ sarà $\omega_P^* = 4\pi$.

Se P è esterno a τ sarà $\omega_P^* = 0$.

Se P giace su σ, ma non sul piano $z = 0$, e ne è punto ordinario, sarà $\omega_P^* = 2\pi$.

Se P giace sul piano $z = 0$, sarà in ogni caso $\omega_P^* = 0$.

Per $z_P < 0$ le condizioni si deducono subito notando che $\omega_{P_1}^* = \omega_P^*$. E ugualmente se σ giace nel semispazio $z \leqq 0$.

b) Come caso particolare, sia τ un dominio di 2ª specie, del semispazio $z \geqq 0$, e designamo, come faremo anche in seguito, con π_0 il suo contorno sul piano $z = 0$, con σ la parte rimanente. Diciamo α_P e ω_P^* i corrispondenti angoli solidi iperbolici. Alla somma $\alpha_P + \omega_P^*$ si potranno applicare i risultati precedenti; in particolare sarà

$$\alpha_P + \omega_P^* = 4\pi$$

quando π è interno a τ o a τ_1.

Si faccia ora tendere P dall'interno di τ a un punto M interno al dominio piano π_0: ω_P^* che è continuo in M (M essendo fuori di σ) tende al suo valore in M che è nullo, e si ha:

$$\lim_{P \to M} \alpha_P = 4\pi.$$

Si noti invece che α_P in M ha valore nullo, onde resta stabilito così per un dominio piano π_0 il comportamento del corrispondente angolo solido iperbolico α_P nei punti di π_0.

Se M è sul piano $z = 0$, ma fuori di π_0, si ha invece continuità e cioè:

$$\lim_{P \to M} \alpha_P = 0.$$

14. Il comportamento della generale funzione potenziale iperbolica di doppio strato nell'intorno di un punto M della superficie potenziante σ può essere compendiato nei casi usuali in una formula analoga a quella

data da Neumann per il caso euclideo, e a cui perciò conserveremo la stessa denominazione. Essa può scriversi:

$$\lim_{P \to M} \int (\mu_Q - \mu_M)\, d\omega_P^* = \int (\mu_Q - \mu_M)\, d\omega_M^*$$

od anche:

$$\lim_{P \to M} [W(P) - \mu_M \omega_P^*] = W(M) - \mu_M \omega_M^* \tag{2}$$

e può dirsi che essa riduca lo studio della $W(P)$ generale a quella del caso particolare $\mu_Q = 1$.

Non daremo la dimostrazione di questa formula, perchè nei casi più semplici essa può svolgersi in modo perfettamente analogo a quello che si usa per la formula di Neumann vera e propria[16]); nè per le ragioni già dette, intendiamo occuparci delle condizioni più generali in cui essa sussiste. Del resto, per le superficie del semispazio $z > 0$, concepite come superficie dello spazio iperbolico, la formula può dirsi dimostrata da Fubini; per i punti del piano limite valgono invece le considerazioni di Bianchi, riferentesi alla trasformata (B), come si è detto al n° 10, ma facilmente adattabili.

Per applicare la formula (2) ai vari casi particolari occorre conoscere ω_M^* e il limite di ω_P^* quando P tende ad M; a ciò servono in molti casi i risultati del n° 13. E così:

a) Per una superficie chiusa σ contorno di un dominio τ e per un punto P interno che tenda ad un punto M di σ non situato sul piano $z = 0$, e che per semplicità supporremo ordinario, si ha:

$$\omega_M^* = 2\pi, \qquad \omega_P^* = 4\pi$$

e quindi

$$\lim_{P \to M} W(P) = W(M) + 2\pi\mu_M. \tag{a}$$

Se P tende invece ad M dall'esterno, si ha:

$$\omega_M^* = 2\pi \qquad \omega_P^* = 0$$

e quindi

$$\lim_{P \to M} W(P) = W(M) - 2\pi\mu_M.$$

b) Per un dominio π_0 del piano $z = 0$, e per un punto P che, da una parte o dall'altra tenda ad un punto M interno a π_0, si ha:

$$\omega_M^* = 0, \qquad \lim \omega_P^* = 4\pi, \qquad W(M) = 0$$

e quindi

$$\lim_{P \to M} W(P) = 4\pi\mu_M.$$

---

[16]) Cfr. si veda, per esempio, Korn (loc. cit. nota (15)) 1. B., 3. Abs., 1. Kap.

15. Il precedente caso a) conduce in modo naturale alla risoluzione del problema di Dirichlet per l'equazione (A) col metodo di Fredholm. Dati i valori $U(M)$ distribuiti con continuità sul contorno σ di un dominio di 1ª specie τ, si tenti di rappresentare la soluzione della (A) regolare in τ e che assume su σ i valori assegnati mediante un potenziale di doppio strato iperbolico di momento incognito μ_Q. Al tendere di un punto P dall'interno a un punto M del contorno dovrà essere:

$$\lim_{P \to M} W(P) = U(M)$$

e quindi per la formula trovata:

$$W(M) + 2\pi\mu_M = U(M)$$

ossia:

$$\mu_M + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \mu_Q \frac{d\omega_M^*}{d\sigma}\, d\sigma = \frac{1}{2\pi} U(M) \tag{3}$$

equazione integrale del tipo Fredholm, di 2ª specie, a cui deve soddisfare la funzione μ_Q. Ricavato μ_Q, è anche noto senz'altro il potenziale cercato $W(P)$.

Esaminiamo brevemente le condizioni di risolubilità della (3). Il nucleo dell'equazione è:

$$K^*(M, Q) = \frac{d\omega_M^*}{d\sigma} = \frac{1}{z_Q}\frac{d\Omega(M, Q)}{dn} = \frac{4 z_M^2}{r^2 r_1^2}\cos(nt)$$

e nell'ultima forma fa presumere l'esistenza di una singolarità per $M = Q$. Per analizzarla meglio osserviamo che si può scrivere [n° 3, (3′)]

$$K^*(M, Q) = 2 z_M \left(\frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} - \frac{1}{r_1}\frac{d\frac{1}{r}}{dn} \right).$$

Si ha perciò:

$$r K^*(M, Q) = 2 z_M \frac{d\frac{1}{r_1}}{dn} - \frac{2 z_M}{r_1} r \frac{d\frac{1}{r}}{dn}.$$

Ora il primo termine del secondo membro è sempre limitato; quanto al secondo, esso differisce per il fattore $\frac{2 z_M}{r_1}$ dal prodotto $r K(M, Q)$ dove $K(M, Q)$ è il nucleo dell'equazione di Fredholm a cui si riduce il problema di Dirichlet ordinario. Le condizioni perchè i due nuclei siano infinitesimi di 1° ordine rispetto alla distanza $r = (MQ)$ sono dunque le stesse, e sono soddisfatte, per esempio, se σ ha dovunque curvature principali limitate. In questa ipotesi, dunque, valgono per la (3) i tre teoremi fondamentali di Fredholm; il teorema di unicità ci assicura poi che $-\frac{1}{2\pi}$ non è un parametro, sicchè l'equazione è risolubile.

Volendo applicare il metodo di Fredholm a un dominio di seconda specie, di contorno $\sigma + \pi_0$ converrebbe supporre prima che i valori $U(M)$ su π_0 fossero nulli (caso a cui, come vedremo, ci si può sempre ricondurre), e tentare di esprimere la soluzione mediante il potenziale di un doppio strato deposto su σ; le condizioni su π_0 sono così identicamente verificate. Si ha così la medesima equazione integrale (3); però le singolarità del nucleo sono allora assai complesse e non sembrano garantire più la validità dei teoremi di Fredholm. Tali complicazioni si presentano precisamente nei punti dell'orlo di σ, o, per dir meglio, quando M e Q tendono ambedue ad uno stesso punto O dell'orlo.

Per es., se nell'intorno di O la σ è piana, e precisamente è un dominio piano terminato sul piano $z = 0$ a un segmento AB passante per O, per due punti M, Q di questo dominio risulta senza difficoltà:

$$\frac{dr}{dn} = 0, \qquad \frac{dr_1}{dn} = \frac{2 z_M \cos(z\,n)}{r_1}$$

e quindi:

$$K^*(M, Q) = \frac{4 z_M^2 \cos(z\,n)}{r r_1^3}.$$

Ne segue che se $\cos(z\,n) \neq 0$, l'espressione $r K^*(M, Q)$ non è limitata nell'intorno di O; ciò sarà provato, e sarà precisato in pari tempo il comportamento del nucleo, stabilendo che $r^2 K^*(M, Q)$ è limitato, e che al tendere di M a Q in modo opportuno tende a un limite diverso da zero. Ed infatti, essendo $r < r_1$, $z_M < r_1$ si ha:

$$|r^2 K^*(M, Q)| < 4;$$

d'altronde, se M e Q, partendo da due posizioni iniziali distinte $\overline{M}$, $\overline{Q}$ (tali però che $z_M \neq 0$) si avvicinano ad O in modo che la terna OMQ si mantenga omotetica alla $O\overline{M}\overline{Q}$, la funzione $r^2 K^*(M, Q)$ conserva il valore iniziale, non nullo, e quindi tende ad esso. In tale caso dunque non potrebbe assicurarsi la applicabilità del metodo di Fredholm.

16. Sull'uso della (a) si fonda anche il metodo di Neumann per la risoluzione del problema di Dirichlet, metodo che vale nella sua forma originaria per i soli contorni convessi, ma di cui la validità fu riconosciuta da Poincaré in casi estremamente generali. L'applicazione di questo metodo alla (A), in forma intrinseca, è stata data da Fubini[17]; riferendosi essa a domini limitati dello spazio iperbolico, la sua validità è per noi ristretta ai domini di 1ª specie.

Probabilmente si possono estendere al caso iperbolico anche altri metodi noti per il caso euclideo, come il metodo del «balayage», il metodo

[17]) loc. cit.; vedi nota (2).

alternato di Schwarz ecc. e il cosidetto «principio di minimo» (riferentesi qui all' integrale

$$\int_\tau \frac{1}{z} \Delta_1 U \, d\tau \Big),$$

onde il problema di Dirichlet per la (A) è da ritenersi risolubile in condizioni generalissime. E inversamente, i casi di eccezione segnalati da Lebesgue, e i recenti fondamentali lavori dello stesso Lebesgue, di Wiener, Perron, Kellogg, Bouligand ecc. sulla formulazione più generale del problema e sulle condizioni di «regolarità» al contorno[18]) sono certo estensibili, e talvolta in modo immediato, alla (A). Ma su ciò non è il caso di insistere, presentandosi ben più interessante la estensione di tali questioni alle equazioni più generali di tipo ellittico, di cui la (A) è caso particolarissimo.

Possiamo anche notare che la trasformazione $U = \sqrt{z}\, V$ muta la (A) nell' altra:

$$\Delta_2 V = \frac{3}{4 z^2} V$$

a cui si applica immediatamente il metodo di Picard delle approssimazioni successive, previa risoluzione del problema di Dirichlet ordinario; ciò, naturalmente, nei domini di 1ª specie.

Per i domini di 2ª specie tutti i metodi generali e speciali considerati presentano circostanze che non ne garantiscono più la validità, e che divengono sempre più complesse per i domini di 3ª specie. Noi non ci fermeremo su nessuno di questi metodi, avendo preferito escogitare un procedimento che assicura la possibilità di risolvere il problema di Dirichlet per la (A) per i domini di 2ª specie, sotto ipotesi generalissime, quando essa sia stabilita per certi domini parziali di 1ª specie; metodo di larga applicabilità, a cui sarà dedicato il cap. 4. I domini di 3ª specie richiederanno poi considerazioni particolari, a cui ci applicheremo in seguito.

17. Si è visto (n° 15) che per un dominio di 2ª specie, di contorno $\sigma + \pi_0$ e per una distribuzione continua di valori arbitrari $U(Q)$ su σ e nulli su π_0 il problema di Dirichlet per la (A) si traduce nell' equazione integrale

$$\mu_M + \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \mu_Q \frac{d\omega_M^*}{d\sigma} \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} U(M)$$

il cui nucleo possiede in generale singolarità assai complesse. Ma ogni difficoltà sparisce se è identicamente

$$\frac{d\omega_M^*}{d\sigma} \equiv 0$$

---

[18]) V. l' estesa bibliografia nel citato lavoro di Bouligand (nota [13])).

caso che si verifica nell'unico caso che σ sia una semisfera geodetica (ossia terminata al piano $z = 0$). Ciò risulta subito dall'espressione

$$\frac{d\omega_M^*}{d\sigma} = \frac{1}{z_Q} \frac{d\Omega(M, Q)}{dn}$$

la quale è sempre nulla solo se le superficie $\Omega(M, Q) = \text{cost.}$ (per M fisso) tagliano σ ortogonalmente; ora si ricorderà che queste superficie sono sfere ortogonali alle sfere geodetiche passanti per M.

Si ha dunque in questo caso:

$$\mu_M = \frac{1}{2\pi} U(M)$$

e quindi per la soluzione cercata:

$$W(P) = \frac{1}{2\pi} \int U(M)\, d\omega_P^* = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma U(M) \frac{d\omega_P^*}{d\sigma} d\sigma$$

essa viene cioè espressa dal doppio strato avente per momento i valori noti in superficie, a meno del fattore $\frac{1}{2\pi}$.

Questo semplicissimo risultato non deve sorprendere: un caso perfettamente analogo si ha per l'ordinario problema di Dirichlet nel caso del semispazio, i valori all'infinito essendo nulli; e la formula risolutiva ha appunto la forma:

$$W(P) = \frac{1}{2\pi} \int U(M)\, d\omega_P$$

(il $d\omega_P$ essendo l'angolo solido elementare euclideo). Ora il dominio che stiamo studiando è proprio l'immagine del semispazio iperbolico, i punti di π_0 corrispondendo ai punti all'infinito delle rette del semispazio.

Dall'espressione trovata risulta immediatamente che la $W(P)$ che risolve il nostro problema è prolungabile anche nel dominio simmetrico τ_1 dando luogo nell'intera sfera $\tau + \tau_1$ ortogonale al piano $z = 0$ ad una funzione regolare, anzi analitica, *anche nei punti del piano* $z = 0$ *interni al dominio.*

Il prolungamento avviene in modo che la soluzione è funzione pari di z:

$$W(P_1) = W(P)$$

ciò che indichiamo brevemente come prolungamento *per riflessione.*

Facilmente si estende questa affermazione al caso generale dando luogo al risultato per noi fondamentale che: *una soluzione della* (A) *regolare in un dominio di* 2ª *specie* τ *situato nel semispazio* $z \geq 0$ *ed avente come contorno* π_0 *sul piano* $z = 0$ *un dominio* (*o più generalmente un insieme dotato di punti interni*), *nel quale assume valori nulli, è analitica, oltre che nei punti interni a* τ, *anche nei punti interni a* π_0; *essa può essere*

prolungata per riflessione nel semispazio opposto dando luogo ad una soluzione analitica in tutto il dominio $\tau + \tau_1$.

Ed infatti se si considera un punto P_0 interno a π_0 e una sfera di centro P_0 interna a τ e si chiama λ la parte di essa che sta nel semispazio $z \geqq 0$, λ_1 la rimanente, la soluzione $W(P)$ della (A) che sul contorno di λ assume gli stessi valori ivi assunti dalla soluzione data coincide con questa, per il teorema di unicità. Ma la $W(P)$ è analitica in P_0 ed è prolungabile in una soluzione analitica in tutto $\lambda + \lambda_1$, quindi lo stesso può dirsi della soluzione data. Per l'arbitrarietà di P_0 si ottiene il risultato enunciato.

18. La conseguenza della formula di Neumann indicata con b) al n° 14 ci dà la risoluzione di un nuovo problema di valori al contorno per un dominio di 2ª specie, e precisamente per l'intero semispazio $z \geqq 0$.

Si è trovato infatti che, per un doppio strato di momento μ_Q deposto sul dominio π_0 del piano $z = 0$, il potenziale iperbolico

$$W(P) = \int \mu_Q \, d\omega_P^* = 4 z_P^2 \int_{\pi_0} \mu_Q \frac{d\pi_0}{r^4}$$

soddisfa alla proprietà:

$$\lim_{P \to M} W(P) = 4\pi \mu_M,$$

M essendo un punto interno a π_0, mentre

$$\lim_{P \to M} W(P) = 0$$

se M è un punto del piano $z = 0$ esterno a π_0; inoltre $W(P)$ tende a 0 se P tende all'infinito (nel senso usuale nella teoria del potenziale). Sicchè, data su π_0 una distribuzione continua di valori $U(Q)$ basterà assumere

$$\mu_Q = \frac{1}{4\pi} U(Q)$$

ossia considerare la funzione:

$$W(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_{\pi_0} U(Q) \frac{d\pi_0}{r^4} \tag{4}$$

per ottenere *una soluzione della* (A) *regolare in tutto il semispazio* $z \geqq 0$, *nulla all'infinito, e che assume i valori assegnati* $U(Q)$ *nei punti interni a* π_0, *valori nulli nei punti del piano* $z = 0$ *esterni a* π_0.

Essa sarà l'unica soluzione rispondente a questi requisiti se, come qui supponiamo, π_0 è un dominio, limitato da una o più linee rettificabili, in quanto la discontinuità che generalmente sussisterà sul contorno di π_0 non infirma in tal caso il teorema di unicità (n° 7).

Questo risultato può naturalmente trasportarsi all'equazione (B) del n° 10; si ottiene in tal modo, per la soluzione della (B) regolare in tutta la sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ e che assume in una parte π_0 del contorno valori noti, nelle rimanenti valori nulli, la formula:

$$(4') \qquad W(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi_0} U(Q) \frac{(1-\varrho^2)^2}{r^4} d\pi_0 \quad [r = (PQ),\ \varrho = (OM)].$$

La considerazione della (B) ha il vantaggio che per essa si può ammettere che il dominio π_0 comprenda tutta la sfera; la formula indicata dà allora la soluzione della (B) regolare in tutta la sfera e che assume al contorno valori assegnati, caso che è più generale del precedente. Essa esprime anche, si può dire, la funzione armonica dello spazio iperbolico che assume nei punti all'infinito valori assegnati. Sotto questo aspetto essa è data da Bianchi [19]), e viene da questo Autore dedotta in modo assai indiretto. Si deve a Fubini [20]) l'osservazione che alla (4') si può giungere formalmente partendo dal teorema della media di Gauss, descrivendo intorno ad un punto P^* arbitrario dello spazio iperbolico una sfera e facendo crescere indefinitamente il raggio di questa.

La nostra espressione di $W(P)$ essendo in sostanza una trasformazione di quella di Bianchi, riteniamo opportuno definire come *integrale di Bianchi* per la data distribuzione di valori sul dominio π_0 la funzione:

$$W(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_{\pi_0} U(Q) \frac{d\pi_0}{r^4}$$

di cui abbiamo poco fa enunciato per disteso le proprietà.

19. Attraverso la (B) sarebbe facile studiare l'integrale di Bianchi nel caso di un dominio π_0 che occupasse l'intero piano $z = 0$; ma non è neppur difficile uno studio diretto, cui accenniamo brevemente, non avendo per noi la questione importanza essenziale.

Supporremo che i valori deposti sul piano π_0 siano distribuiti con continuità, e ciò anche all'infinito, cioè che se Q è il punto generico di π_0, al tendere di Q all'infinito, $U(Q)$ abbia un limite finito k. Divideremo poi il piano π_0 in due domini π_0' e π_0'' mediante la circonferenza di centro O e raggio R (arbitrari); sia π_0' la parte finita.

L'integrale esteso a π_0'

$$W'(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_{\pi_0'} U(Q) \frac{d\pi_0}{r^4}$$

[19]) loc. cit.; vedi nota [3]).

[20]) Fubini, Sul problema di Dirichlet nello spazio iperbolico indefinito (Rend. Lincei, 5ª, **13** (1904)).

rappresenta una soluzione della (A) regolare nel semispazio, limitata, nulla nell'interno di π_0'' e all'infinito, e che assume nell'interno di π_0' i valori prescritti $U(Q)$.

Per studiare la parte residua

$$W''(P) = \frac{z^2}{\pi} \int_{\pi_0''} U(Q) \frac{d\pi_0}{r^4}$$

operiamo l'inversione di centro O e potenza R^2. Per gli elementi trasformati si usi il soprassegno: si ha subito:

$$r = \bar{r} \frac{(OP)(OQ)}{R^2}, \qquad d\pi_0 = \frac{(OQ)^4}{R^4} d\bar{\pi}_0, \qquad z_P = z_{\bar{P}} \cdot \frac{(OP)^2}{R^2}$$

onde sostituendo e ponendo $U(Q) = \overline{U}(\bar{Q})$:

$$\overline{W}''(\bar{P}) = W''(P) = \frac{z_{\bar{P}}^2}{\pi} \int_{\pi_0'} \overline{U}(\bar{Q}) \frac{d\bar{\pi}_0}{\bar{r}^4}.$$

Ciò dimostra che, come funzione di $\bar{P}$, $W''(\bar{P})$ è ancora un integrale di Bianchi, relativo al dominio finito π_0' e alla distribuzione $U(\bar{Q})$, continua anche in O, ove è $U(O) = k$. E valgono perciò per esso la proprietà trovate prima per $W'(P)$; in particolare esso è soluzione della (A). Ma si è avvertito nell'*Introduzione*, e la verifica non è difficile, che la detta inversione, in quanto immagine di un movimento (anzi di una simmetria) dello spazio iperbolico muta in sè la (A); e quindi la $W''(P)$ in ogni punto del semispazio $z > 0$ è pure soluzione regolare della (A). E lo stesso avviene quindi per

$$W(P) = W'(P) + W''(P).$$

Implicitamente viene così dimostrato che nelle ipotesi poste l'integrale di Bianchi è ovunque finito.

Vediamo ora le condizioni al contorno. Nei punti interni a π_0', $W'(P)$ vale $U(P)$ e $W''(P)$ vale $\overline{W}''(\bar{P})$ cioè 0; nei punti interni a π_0'', $W'(P)$ vale 0 e $W''(P)$ vale $\overline{W}''(\bar{P})$ cioè $U(\bar{P}) = U(P)$. Concludiamo che in tutto π_0, salvo al più sulla circonferenza descritta, $W(P) = U(P)$. Ma non sussiste eccezione nemmeno per questa circonferenza, poichè essa può essere sostituita con un'altra dello stesso centro in modo da rientrare nella dimostrazione precedente.

Evidentemente $W(P)$ risulta limitata: se P tende all'infinito, $W'(P)$ tende a zero e $W''(P) = \overline{W}''(\bar{P})$ tende a $\overline{W}''(O) = k$. Concludendo: *Assegnata sul piano limite π_0 la distribuzione di valori $U(Q)$ continua in tutto π_0 e anche all'infinito, l'integrale di Bianchi*:

$$W(P) = \frac{1}{4\pi} \int U(Q)\, d\omega_P^* = \frac{z_P^2}{\pi} \int U(Q) \frac{d\pi_0}{r^4}$$

rappresenta una soluzione della (A) *regolare in tutto il semispazio* $z > 0$, *e che assume nei punti del piano* π_0 *e all'infinito i valori assegnati* $U(Q)$.

Come si è già osservato (n° 10) è unica la soluzione dotata di tale proprietà. Il risultato si può generalizzare, ammettendo singolarità di vario genere (discontinuità, punti d'infinito) nella distribuzione $U(Q)$; ma su ciò non insistiamo.

Abbiamo considerato l'integrale di Bianchi nel semipiano $z \geqq 0$; nel semipiano opposto esso rappresenta pure una soluzione della (A) con analoghe proprietà, in quanto la $W(P)$ è funzione pari di z_P. Le due soluzioni, entrambi analitiche, nei rispettivi semispazi, non saranno però in generale continuazione analitica una dell'altra. Ciò avverrà tuttavia se $U(Q)$ è nullo in un dominio del piano, questo dominio potendosi considerare escluso dal campo di integrazione; ed anche in casi più generali che determineremo esattamente in seguito.

20. I risultati precedenti ci permettono di completare quanto si è trovato nel n° 17, circa il problema della semisfera geodetica e la natura delle soluzioni regolari in domini di 2ª specie.

Sia infatti ancora τ un dominio di 2ª specie, del semispazio $z \geqq 0$, di contorno $\sigma + \pi_0$ e $U(P)$ una soluzione della (A) regolare in τ. Qualunque sia la natura dell'insieme π_0, che supponiamo solo dotato di punti interni, è sempre possibile determinare un integrale di Bianchi che assuma su π_0 i valori ivi assunti dalla $U(P)$; basta prendere infatti un cerchio π_1 (per esempio) che contenga π_0 nel suo interno e costruire una funzione $U_1(Q)$ continua in π_1, e che coincida con $U(Q)$ nei punti di π_0 [21]); l'integrale di Bianchi:

$$W(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_{\pi_1} U_1(Q) \frac{d\pi_1}{r^4}$$

soddisfa alle condizioni volute.

Ciò posto, la differenza $U(P) - W(P)$ è una soluzione della (A) regolare in τ e che assume su π_0 valori nulli; perciò essa è analitica nei punti interni a π_0 e prolungabile nel dominio opposto τ_1. Si ha dunque: *Una soluzione della* (A), *regolare in un dominio di* 2ª *specie* τ *situato nel semispazio* $z \geqq 0$, *e avente come contorno* π_0 *sul piano* $z = 0$ *un insieme dotato di punti interni, è la somma di un integrale di Bianchi determinato* (in infiniti modi) *dai valori della soluzione in* π_0 *e di una soluzione analitica anche nei punti interni a* π_0 *e prolungabile per riflessione nel dominio simmetrico.*

[21]) Ciò è possibile, per un noto teorema di Lebesgue (Rend. Palermo, 1907); cfr. anche Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig, Teubner, 1918) dove nel n° 541 è esposta una dimostrazione di Bohr.

Sicchè le proprietà della soluzione nei punti di π_0 (esistenza di derivate, analiticità) dipendono *unicamente* dai valori assunti dalla soluzione negli stessi punti.

La stessa considerazione serve a provare che *il problema di Dirichlet per il dominio τ di 2ª specie può sempre ridursi al caso particolare in cui i valori sul piano limite sono nulli.* Ed infatti, costruito nel modo indicato l'integrale di Bianchi $W(P)$, di esso saranno noti i valori su σ; onde saranno noti della parte residua i valori su σ e quelli su π_0, questi ultimi essendo nulli.

In particolare, possiamo ora ritenere risoluto, ed in forma semplicissima, il problema di Dirichlet per la semisfera geodetica, nelle ipotesi più generali. La soluzione è la somma di due termini, che sono ambedue potenziali di doppio strato iperbolico: l'uno disteso su σ, l'altro su un dominio π_1, contenente nel suo interno π_0. Si può del resto assumere $\pi_1 - \pi_0$; la soluzione ottenuta soddisfa certo alle condizioni richieste salvo al più sul contorno di π_0; essendo essa limitata, è applicabile (n° 7) il teorema di unicità, sicchè essa coincide con la soluzione richiesta, di cui l'esistenza è stata ormai assicurata.

A titolo di curiosità, notiamo che per questo speciale problema può trovarsi una formula risolutiva estremamente semplice, immaginando decomposta la soluzione in due parti, una nulla su π_0 e l'altra nulla su σ. La prima dovrà assumere su σ i valori dati $U(Q)$ e quindi sarà espressa dal potenziale di doppio strato

$$W_1(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma U(Q) \frac{d\omega_P^*}{d\sigma} d\sigma$$

la seconda dovrà assumere su π_0 i valori dati $U(Q)$ e noi cercheremo di esprimerla come somma dell'integrale di Bianchi relativo a π_0

$$W_2(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_{\pi_0} U(Q) \frac{d\pi_0}{r^4}$$

e di un altro integrale di Bianchi

$$W_3(P) = -\frac{z_P^2}{\pi} \int_{\pi_0} V(Q) \frac{d\pi_0}{r^4}$$

esteso al dominio complementare $\bar{\pi}_0$; in tal modo le condizioni relative a π_0 sono soddisfatte, perchè entro π_0 è $W_3(P) = 0$. Dovrà essere su σ:

$$W_2(P) + W_3(P) = 0.$$

Ora effettuando l'inversione che lascia fissi i punti di σ, la $W_3(P)$ si muta in una funzione $\overline{W}_3(\bar{P})$ del punto trasformato, che è espressa

(n° 19) da un nuovo integrale di Bianchi, esteso a π_0, e cioè

$$\overline{W}_3(\overline{P}) = \frac{z_{\overline{P}}^2}{\pi} \int \overline{V}(Q) \frac{d\pi_0}{\overline{r}^4} \qquad [\overline{V}(Q) = V(\overline{Q})].$$

Su σ è $\overline{P} = P$ e quindi dovrà essere:

$$W_2(P) + \overline{W}_3(P) = 0.$$

A ciò si soddisfa immediatamente prendendo $\overline{V}(Q) = -U(Q)$ cioè deponendo su un punto $\overline{Q}$ di π_0 l'opposto del valore $U(Q)$ deposto su Q (di π_0) corrispondente a $\overline{Q}$ nell'inversione. Si ha così la formula definitiva:

$$W(P) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma U(Q) \frac{d\omega_P^*}{d\sigma} d\sigma + \frac{z_P^2}{\pi} \int_{\pi_0} U(Q) \frac{d\pi_0}{r^4} - \frac{z_P^2}{\pi} \int_{\overline{\pi}_0} U(Q) \frac{d\pi_0}{\overline{r}^4}$$

$$[r = (PQ), \quad \overline{r} = (P\overline{Q})].$$

Anche qui i dubbi che potrebbero sorgere sul comportamento di $W(P)$ nei punti dell'orlo di σ si tolgono subito mediante il teorema di unicità.

L'artificio usato ha un'origine semplicissima qualora lo si consideri nello spazio iperbolico ove la semisfera diviene un piano, e la inversione la simmetria rispetto ad esso; ed è analogo ad un procedimento (*metodo delle immagini*) mediante il quale da molto tempo si sanno risolvere vari casi del problema di Dirichlet ordinario (semisfera, diedro retto).

4. Il teorema di esistenza per i domini di 2ª specie.

21. Come già si è avvertito (n° 16) svolgeremo nel presente capitolo un metodo generale per la trattazione del problema dei valori al contorno per l'equazione (A) nei domini di 2ª specie, metodo che, per i presupposti su cui si fonda, sembra essere facilmente estendibile a problemi analoghi relativi alle più generali equazioni alle derivate parziali di 2° ordine del tipo ellittico.

Precisiamo le condizioni del problema. Sia τ un dominio di 2ª specie, il contorno del quale sia costituito da una parte σ contenuta nel semispazio $z > 0$ e da una π_0 giacente nel piano $z = 0$; diremo *orlo* l di σ il complesso dei punti limiti di σ non appartenenti a σ e che coincide evidentemente col contorno di π_0. Sul contorno di τ, cioè $\sigma + \pi_0$ sia data una distribuzione continua di valori $u(Q)$; si dovrà cercare allora una soluzione della (A) regolare in τ e che assuma sul contorno i valori assegnati.

Queste condizioni possono essere rese anche più generali, ammettendo possibili discontinuità, e a noi converrà farlo in una certa misura. Noi ammetteremo cioè che la distribuzione $u(Q)$ sia continua su σ e su π_0, ma possa presentare lungo l delle discontinuità, restando però limitata;

e cercheremo una soluzione regolare entro τ, continua nei punti di σ e nei punti interni di π_0, dove assume i valori assegnati, e inoltre limitata.

Ciò posto, il problema ammette due importanti semplificazioni. Si osservi anzitutto che la distribuzione $u(Q)$ può considerarsi come differenza di due distribuzioni $u'(Q)$, $u''(Q)$ dotate delle stesse proprietà della $u(Q)$, ed anzi continue se la $u(Q)$ è continua, e di più non negative; per esempio ponendo

$$u'(Q) = |u(Q)|, \qquad u''(Q) = |u(Q)| - u(Q).$$

Se il problema è risolubile per le distribuzioni $u'(Q)$, $u''(Q)$ e sono $W'(P)$, $W''(P)$ le soluzioni relative, sarà evidentemente

$$W(P) = W'(P) - W''(P)$$

la soluzione del problema dato. Dunque *i valori al contorno possono supporsi non negativi.*

In secondo luogo, come si è già visto (n° 20) *i valori sul contorno* π_0 *possono supporsi nulli* (anche questo senza perdere la eventuale continuità nei punti di l).

Sia dunque:

$$0 \leqq u(Q) \leqq M \text{ su } \sigma,$$
$$u(Q) = 0 \text{ su } \pi_0.$$

22. Sia allora $h > 0$, e si consideri il dominio τ_h, connesso o no, costituito dai punti di τ per i quali $z \geqq h$; esso esisterà per h abbastanza piccolo, e il suo contorno sarà costituito dalla parte σ_h di σ per cui $z \geqq h$ e da un insieme π_h giacente sul piano $z = h$. Distendiamo su σ_h i valori dati $u(Q)$ e su π_h valori nulli e *ammettiamo che per questa distribuzione di valori esista la soluzione del problema di Dirichlet per il dominio di* 1ª *specie* τ_h (nel senso del n° precedente); e poichè la distribuzione sarà in generale discontinua lungo l'orlo l_h di τ_h, *ammettiamo che* l_h *sia tale da garantire la validità del teorema di unicità e teoremi connessi* (proposizioni b), c), d) del n° 7). Con queste ipotesi, sarà determinata in τ_h una soluzione $U(P, h)$ soddisfacente alle dette condizioni e sarà entro τ_h:

$$0 \leqq U(P, h) \leqq M.$$

Per un dato punto P, il valore $U(P, h)$ sarà determinato per ogni $h < z_P$. Proveremo che al tendere di h a zero il valore $U(P, h)$ tende a un limite determinato $W(P)$, e che la funzione $W(P)$, così definita in ogni punto di τ, salvo in π_0, è quella che soddisfa alle condizioni del problema.

Dimostriamo anzitutto l'esistenza del limite $W(P)$. Siano h_1, h_2 $(h_1 > h_2)$ due valori di h; $U(P, h_1)$, $U(P, h_2)$, le soluzioni corrispondenti. Ambedue sono definite in τ_{h_1}, e assumono su σ_{h_1} gli stessi valori; invece su π_{h_1} la

$U(P, h_1)$ è nulla mentre la $U(P, h_2)$ è positiva o nulla. Sicchè la funzione $U(P, h_2) - U(P, h_1)$, che è una soluzione regolare in τ_{h_1} sarà nulla su σ_{h_1} positiva o nulla su π_{h_1}: essa è perciò positiva o nulla nell'interno, cioè per ogni punto P' interno a τ_{h_1} è:

$$U(P', h_2) \geqq U(P', h_1)$$

od anche:

$$0 \leqq U(P', h_1) \leqq U(P', h_2) \leqq M.$$

Sicchè il valore $U(P', h)$ al decrescere indefinito di h non decresce, pur rimanendo limitato, e ciò basta per affermare che *esso ha un limite finito* $W(P')$. E sarà:

$$0 \leqq W(P') \leqq M.$$

23. Avremo ora da provare che la $W(P)$ è entro τ soluzione regolare della (A). Si osservi per questo che in ogni sfera λ tutta interna a τ la $W(P)$ è limitata e limite di funzioni continue, quindi integrabile secondo Lebesgue [23]). Lo stesso può dirsi di $\frac{W(P)}{z_P^3}$.

D'altra parte la $U(P, h)$ essendo soluzione regolare in λ soddisfa (n° 6) al teorema di media:

$$U(P', h) \int_\lambda \frac{d\lambda}{z_Q^3} = \int_\lambda U(Q, h) \frac{d\lambda}{z_Q^3}$$

dove P' è il pseudocentro di λ. Al tendere di h a zero, la funzione $\frac{U(Q,h)}{z_Q^3}$ è uniformemente limitata; si può quindi, per il teorema di Arzelà-Lebesgue [24]), passare al limite sotto il segno integrale, ottenendo:

$$W(P') \int_\lambda \frac{d\lambda}{z_Q^3} = \int_\lambda W(Q) \frac{d\lambda}{z_Q^3}.$$

Vediamo così che allo stesso teorema di media soddisfa anche la $W(P)$, e ciò basta (n° 7) per affermare che la $W(P)$ *è entro* τ *soluzione regolare della* (A).

Resta così implicitamente provato che $W(P)$ è funzione continua di P entro τ. Così al tendere di h a zero la funzione $U(P, h)$, continua entro un dominio τ' interno a τ tende variando sempre in un senso ad

---

[22]) Ciò avverrà, per esempio, quando gli l_h siano insiemi Z (n° 8); in particolare siano costituiti da una o più linee rettificabili. Si noti anzi che per la validità del procedimento sarebbe sufficiente che le condizioni poste fossero verificate per una successione discreta di valori di h tendenti a zero.

[23]) Lebesgue, Leçons sur l'intégration etc., p. 111.

[24]) Arzelà, Sull'integrazione per serie, Rend. Lincei, 1885; Lebesgue, loc. cit. p. 114.

una funzione $W(P)$ continua nello stesso dominio. Per un noto teorema [25]) la convergenza è uniforme. Si ha dunque: *la convergenza della* $U(P, h)$ *verso la* $W(P)$ *è uniforme in ogni dominio* τ' *tutto interno a* τ.

24. Esaminiamo ora la continuità di $W(P)$ nei punti di σ, e consideriamo per questo anzitutto il caso particolare in cui su σ si abbia sempre $u(Q) = 1$. Le funzioni $U(P, h)$ e $W(P)$ corrispondenti a questo caso si indichino con $\theta(P, h)$, $\Theta(P)$.

Siano h_0, h_1, h_2 valori di h arbitrari, tali che $h_0 > h_1 > h_2 > 0$; sarà in τ_{h_0} per ciò che si è visto in generale:

$$\theta(P, h_1) \leqq \theta(P, h_2) \leqq \Theta(P) \leqq 1$$

da cui:

$$0 \leqq \Theta(P) - \theta(P, h_2) \leqq 1 - \theta(P, h_1).$$

Ora la $\theta(P, h_1)$ è continua in τ_{h_1} e assume su σ_{h_0} il valore 1, onde, scelta una quantità positiva arbitraria ε si può trovare un $\delta > 0$ tale per tutti i punti di τ_{h_0} la cui distanza dal contorno σ_{h_0} sia minore di δ si abbia:

$$1 - \theta(P, h_1) < \varepsilon.$$

Per cui in questa parte di τ_{h_0}, per ogni $h_2 < h_0$ si ha:

$$0 \leqq \Theta(P) - \theta(P, h_2) < \varepsilon.$$

Nella parte residua di τ_{h_0} la convergenza di $\theta(P, h_2)$ a $\Theta(P)$ è uniforme e quindi si può determinare un $h' > 0$ tale che per $h_2 < h'$ sia in questa parte:

$$0 \leqq \Theta(P) - \theta(P, h_2) < \varepsilon.$$

Sicchè per h_2 abbastanza piccolo questa disuguaglianza vale in tutto τ_{h_0}, ossia *in* τ_{h_0} *la convergenza della* $\theta(P, h)$ *alla* $\Theta(P)$ *è uniforme.* Ne segue, $\theta(P, h)$ essendo continua al contorno σ_{h_0}, che $\Theta(P)$ è continua anche nei punti di σ_{h_0}. Ma h_0 è arbitrariamente piccolo, quindi $\Theta(P)$ *è continua in ogni punto di* σ.

Per estendere questo risultato al caso generale, si consideri, oltre la data distribuzione $u(Q)$ di valori al contorno, l' altra

$$u'(Q) = M - u(Q)$$

che è pure formata di valori non negativi. Ad essa corrisponderanno, come prima, le funzioni $U'(P, h)$ evidentemente date da

$$U'(P, h) = M\theta(P, h) - U(P, h)$$

e il loro limite

$$W'(P) = M\Theta(P) - W(P).$$

---

[25]) Dini, Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale (Pisa 1878), n° 99.

Sarà $U'(P,h) \leqq W'(P)$ cioè:

$$0 \leqq W(P) - U(P,h) \leqq M[\Theta(P) - \theta(P,h)].$$

Ne segue immediatamente che *in* τ_{h_0} *la convergenza delle* $U(P,h)$ *verso la* $W(P)$ *è uniforme*, e da questo che *la* $W(P)$ *è continua nei punti di* σ, ossia converge su σ verso i valori assegnati.

25. Resta finalmente da provare che al tendere di P ad un punto A interno a π_0 la $W(P)$ tende a zero; noi dimostreremo più completamente che se s *è un dominio interno a* π_0, *al tendere di* P *ad un punto di* s *la* $W(P)$ *tende a zero, e la convergenza è uniforme.*

Consideriamo per questo un dominio misurabile s_1 contenente s nel suo interno e a sua volta tutto interno a π_0 [26]) e costruiamo la soluzione della (A) regolare nel semispazio $z > 0$, e che assume il valore 0 nell'interno di s_1, il valore 1 nell'interno del dominio complementare $\bar{s}_1$, e all'infinito. Essa è espressa semplicemente da

$$\xi(P) = \frac{1}{4\pi}\omega_P^*$$

essendo ω_P^* l'angolo solido iperbolico determinato da P con $\bar{s}_1$, ossia da

$$\xi(P) = \frac{z_P^2}{\pi}\int_{\bar{s}_1}\frac{d\bar{s}_1}{r^4}.$$

La $\xi(P)$ è regolare nei punti di σ e di l ed assume quivi valori positivi; quindi ammette nell'insieme chiuso $\sigma + l$ un minimo *positivo* m.

Si consideri allora in un qualunque τ_h la funzione

$$\varphi(P,h) = \frac{M}{m}\xi(P) - U(P,h)$$

essa è ivi soluzione regolare della (A) e i suoi valori sul contorno di τ_h sono positivi o nulli, come subito di riconosce. È quindi in τ_h:

$$U(P,h) \leqq \frac{M}{m}\xi(P)$$

e al limite per $h \to 0$, in tutto l'interno di τ:

$$W(P) \leqq \frac{M}{m}\xi(P).$$

Da ciò segue senz'altro che se P tende a un punto A di s, $W(P)$ tende a zero, giacchè per $P \to A$ la $\xi(P)$ tende a zero.

---

[26]) Un tale dominio può ottenersi facilmente mediante una quadrettatura del piano tale che la diagonale di un suo quadrato sia inferiore alla distanza tra l e s; i quadrati aventi all'interno punti di s costituiscono il dominio cercato, evidentemente misurabile.

L'annunziata uniformità della convergenza ha naturalmente il significato seguente: *dato un* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $\delta > 0$ *tale che per ogni punto* P *di* τ *distante da* s *per meno di* δ *si ha* $W(P) < \varepsilon$. Per provarlo si osservi che esiste un δ_1 abbastanza piccolo perchè il dominio t formato dai punti del piano $z = 0$ che hanno da s distanza $\leqq \delta_1$, sia interno a π_0; ed esiste poi un $h_1 > 0$ tale che il cilindro di base t e altezza h_1 appartenga a τ. In tale cilindro la $W(P)$ (posta uguale a zero nei punti di t) è continua, quindi uniformemente continua; esiste perciò un $h_2 < h_1$ tale che per i punti del cilindro di base t e altezza h_2 sia $W(P) < \varepsilon$. Ora è chiaro che per δ abbastanza piccolo i punti di τ che hanno da s distanza $< \delta$ appartengono a questo cilindro; e ciò dimostra quanto si era affermato.

26. Col risultato del numero precedente sono completate le verifiche per il problema ampliato posto nel n° 21; esse però non potrebbero dirsi esaurite per il problema più ristretto, che è poi il problema di valori al contorno nella sua forma consueta. Ed infatti, ove la distribuzione dei valori sia continua anche nei punti dell'orlo, dovrà dimostrarsi che la soluzione $W(P)$, al tendere di P ad un punto dell'orlo tende al valore prescritto in questo punto, cioè a zero.

Più completamente, proveremo che *se la distribuzione dei valori al contorno è continua nei punti dell' orlo, il risultato del* n° 25 *vale anche se* s *coincide con* π_0.

Per questo, essendo ε una quantità positiva arbitrariamente piccola, determiniamo un $h_1 > 0$ tale che nei punti Q di σ per i quali $z_Q < h_1$ sia $u(Q) < \frac{\varepsilon}{2}$; ciò è possibile per la supposta continuità di $u(Q)$ nei punti dell'orlo.

Definiamo poi due distribuzioni $u'(Q)$, $u''(Q)$ di valori al contorno, ponendo $u'(Q)$ uguale al minore dei valori $u(Q), \frac{\varepsilon}{2}$, e $u''(Q) = u(Q) - u'(Q)$. Essa saranno continue su tutto il contorno e nulle su π_0, e daranno luogo a due soluzioni $W'(P)$, $W''(P)$ con le solite proprietà. Sarà poi

$$W'(P) + W''(P) = W(P).$$

Studiamo queste due soluzioni. Per la prima, essendo evidentemente su tutto il contorno $u'(Q) \leqq \frac{\varepsilon}{2}$, sarà

$$W'(P) \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per la seconda osserveremo che è

$$0 \leqq u''(Q) \leqq M \quad \text{in} \quad \sigma_{h_1},$$
$$u''(Q) = 0 \quad \text{in} \quad \sigma - \sigma_{h_1}.$$

Consideriamo allora un dominio misurabile π_0' del piano $z = 0$, contenente π_0 nel suo interno, e costruiamo la funzione $\eta(P)$, soluzione regolare della (A) nel semispazio $z > 0$, che si riduce a zero in π_0' e ad 1 nei punti esterni a π_0': essa sarà data al solito da un integrale di Bianchi. La $\eta(P)$ sarà positiva in τ_{h_1}, e avrà quindi in τ_{h_1} un minimo positivo m.

Ne segue che la funzione

$$\Psi(P, h) = \frac{M}{m}\eta(P) - U''(P, h)$$

per $h < h_1$, è una soluzione della (A) regolare in τ_h, la quale assume sul contorno di τ_h valori positivi; essa vale infatti più di $M - u(Q)$ su σ_{h_1} e $\frac{M}{m}\eta(P)$ sul resto del contorno.

È quindi in tutto τ_h

$$U''(P, h) < \frac{M}{m}\eta(P)$$

e al limite per $h \to 0$, in tutto τ:

$$W''(P) \leqq \frac{M}{m}\eta(P).$$

Concludendo è in tutto τ:

$$W(P) \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{m}\eta(P).$$

Ma per la sua stessa definizione, la $\eta(P)$ tende a zero, ed uniformemente, quando P tende a un punto di π_0, sicchè esisterà un $\delta > 0$ tale che per i punti del semispazio $z > 0$ distanti da π_0 meno di δ sia

$$\eta(P) < \frac{m\,\varepsilon}{2\,M}.$$

Ed allora, per punti siffatti, situati in τ sarà

$$W(P) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

come si voleva.

27. La trattazione precedente potrebbe, volendo, essere approfondita in vari sensi, potendosi, per esempio, supporre discontinua in insiemi opportuni la distribuzione dei valori sul contorno σ; si dimostrebbe allora facilmente la continuità della soluzione in ogni punto di continuità dei valori al contorno, e la continuità uniforme in ogni pezzo ove pure sia continua la distribuzione superficiale. Questioni analoghe si avrebbero da trattare per i punti dell'orlo; ma non riteniamo necessarie tale estensioni.

Vogliamo piuttosto notare, per concludere, che tenendo conto delle semplificazioni indicate al n° 21, i risultati ottenuti per il problema semplificato valgono negli stessi termini per il problema nella sua forma più generale.

5. Soluzioni regolari nei domini di 3ª specie.

28. Lo studio delle soluzioni regolari nei domini di 3ª specie, a cui ora ci accingiamo, richiede che sia risoluta anzitutto una questione preliminare, che si connette in un certo senso all'argomento del capitolo precedente; e cioè la ricerca delle condizioni affinchè una soluzione regolare in un dominio τ di seconda specie possegga in una certa parte s del suo contorno sul piano $z = 0$ derivate prime e seconde pure rispetto a tutte le variabili determinate e finite; condizione evidentemente necessaria perchè la soluzione possa essere prolungata regolarmente oltre s, cioè possa esistere un dominio τ' del semispazio opposto, adiacente al dato lungo s, e una soluzione regolare in $\tau + \tau'$ che si riduca in τ alla soluzione data. Abbiamo già visto come una condizione sufficiente per l'esistenza delle dette derivate sia l'annullarsi della soluzione nei punti di s: in tal caso (n° 17) infatti la soluzione è analitica in questi punti; e il prolungamento cui si è accennato è non solo regolare, ma anche analitico. Ma è prevedibile che l'esistenza delle derivate valga in casi assai più generali.

Evidentemente una prima condizione sarà che la funzione $A(M) = A(x,y)$ cui si riduce la soluzione data $W(P)$ nei punti di s ammetta le derivate A'_x, A'_y, A''_{xx}, A''_{yy}; e dovranno poi esistere, e qui starà la difficoltà della ricerca, le derivate prime e seconde di $W(P)$ rispetto a z nei punti di s. E la derivata prima $W'_z(x, y, 0)$ dovrà esser nulla, come si vede dalla (A):

$$z\,\Delta_2 W = \frac{\partial W}{\partial z}$$

per $z = 0$.

Se le derivate seconde della $W(P)$ oltre che determinate e finite, dovessero essere anche continue, come in un primo tempo (n° 5) avevamo supposto, scrivendo la (A) nella forma

$$W''_{xx}(x, y, z) + W''_{yy}(x, y, z) + W''_{zz}(x, y, z) = \frac{W'_z(x, y, z) - W'_z(x, y, 0)}{z}$$

e passando al limite per $z \to 0$ si otterrebbe:

$$A''_{xx}(x, y) + A''_{yy}(x, y) = 0$$

condizione che se verificata in ogni punto del dominio s esprime che la $A(x, y)$ è armonica in s. Se invece la regolarità si intende nel senso convenuto, la deduzione cade; sussiste però ugualmente il risultato, ed è invertibile.

Precisamente: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una soluzione $W(P)$ della* (A) *regolare in un dominio τ di 2ª specie del semispazio $z \geqq 0$ ammetta derivata prima e seconda rispetto a z determinate e finite nei punti di un dominio s del piano $z = 0$ appartenente al*

contorno di τ su questo piano è che la $W(P)$ si riduca nel dominio s ad una funzione armonica.

La dimostrazione di questa proposizione richiede un'analisi alquanto minuta, e ed essa è dedicato principalmente il presente capitolo. Facciamo precedere due osservazioni. Dal n° 20 sappiamo che la soluzione $W(P)$ è la somma di una soluzione $U(P)$ che assume in s valori nulli ed è quindi analitica in s, e di un integrale di Bianchi $V(P)$ determinato dai valori $A(Q)$ assunti da $W(P)$ su s, e cioè espresso dalla formula:

$$V(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_s A(Q) \frac{ds}{r^4}.$$

Poichè la $U(P)$ ammette certamente derivate rispetto a z determinate e finite (di ogni ordine) nei punti interni ad s, basterà studiare la questione per la $V(P)$.

In secondo luogo, se le derivate cercate esistono, sarà per la (A):

$$V'_z(x, y, 0) = 0$$

ed esisterà il limite

$$\lim_{z \to 0} \frac{V(x,y,z) - V(x,y,0)}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{V'_z(x,y,z)}{2z} = \frac{1}{2} V''_{zz}(x, y, 0)$$

che può scriversi, posto $M = (x, y, 0)$:

$$\text{(C)} \qquad \lim_{z \to 0} \frac{\frac{z^2}{\pi} \int_s A(Q) \frac{ds}{[(QM)^2 + z^2]^2} - A(M)}{z^2}.$$

Si può notare che se in s fosse costantemente $A(Q) = 1$, la soluzione $V(P) - 1$ si annullerebbe in s e quindi sarebbe ivi analitica, ed esisterebbe il limite precedente che vale in questo caso

$$\lim_{z \to 0} \frac{\frac{z^2}{\pi} \int_s \frac{ds}{[(QM)^2 + z^2]^2} - 1}{z^2}$$

(ciò che può vedersi anche direttamente); moltiplicando questo per $A(M)$ e sottraendo dal limite precedente, vediamo che deve esistere il limite:

$$\text{(C')} \qquad \lim_{z \to 0} \frac{1}{\pi} \int_s [A(Q) - A(M)] \frac{ds}{[(QM)^2 + z^2]^2}.$$

Si tratterà dunque di vedere a quali condizioni deve soddisfare la $A(Q)$ nel dominio s affinchè per ogni M entro s esista l'uno o l'altro dei limiti (C), (C'). Queste condizioni sono certamente necessarie per il nostro scopo; non possiamo affermare *a priori* che esse siano sufficienti.

22. Consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{\pi}\int_s (QM)^2 \frac{ds}{[(QM)^2+z^2]^2}$$

e decomponiamolo in due: uno esteso alla superficie s_1 di un cerchio di centro M e raggio abbastanza piccolo a, e l'altro al dominio rimanente s_2. Il primo, introdotte coordinate polari ϱ, θ di polo M si scrive:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi} \varrho^2 \frac{\varrho\, d\varrho\, d\theta}{(\varrho^2+z^2)^2} = 2\int_0^a \frac{\varrho^3 d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^2} = \left[\log(\varrho^2+z^2) - \frac{\varrho^2}{\varrho^2+z^2}\right]_0^a$$

$$= \log\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right) - \frac{a^2}{a^2+z^2}$$

e tende all'infinito per $z \to 0$. Il secondo è invece finito perchè minore di

$$\frac{1}{\pi}\int_{s_2} (QM)^2 \frac{ds}{(QM)^4} < \frac{1}{\pi a^2}\cdot \text{area } s_2 .$$

Si ha dunque

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{\pi}\int_s (QM)^2 \frac{ds}{[(QM)^2+z^2]^2} = +\infty .$$

Riprendendo allora il risultato del numero precedente, abbiamo che se la $A(Q)$ soddisfa alle condizioni del nostro problema deve aver luogo la relazione

(D)
$$\lim_{z\to 0} \frac{\displaystyle\int_s [A(Q)-A(M)] \frac{ds}{[(QM)^2+z^2]^2}}{\displaystyle\int_s (QM)^2 \frac{ds}{[(QM)^2+z^2]^2}} = 0 .$$

Anche qui, *a priori*, non può affermarsi l'equivalenza di questa condizione alla precedente; tuttavia, sarà proprio lo studio della condizione (D) che ci condurrà allo scopo. Se il primo membro della (D) si considera come un numero dipendente dalla funzione A e dal particolare punto M, si presenta come opportuno per esso un simbolo come $\Phi A(M)$; ponendo cioè per ogni funzione $A(Q)$ continua in s:

$$\Phi A(M) = \lim_{z\to 0} \frac{\displaystyle\int_s [A(Q)-A(M)] \frac{ds}{[(QM)^2+z^2]^2}}{\displaystyle\int_s (QM)^2 \frac{ds}{[(QM)^2+z^2)^2}}$$

(il limite potendo o no esistere, essere finito o infinito). E le funzioni $A(Q)$ che noi cerchiamo debbono allora essere tali che in tutto s sia

$$\Phi A(M) = 0.$$

30. Dimostriamo alcune proprietà dell'operatore Φ:

a) *Il valore di $\Phi A(M)$, supposto determinato e finito, dipende solo dai valori assunti da $A(Q)$ nell'intorno di M: esso non muta sostituendo ad s un intorno qualunque di M.*

Basterà provarlo nel caso in cui l'intorno sia un cerchio s_1 di centro M e raggio arbitrario a; porremo $s_2 = s - s_1$. Per comodità introduciamo le notazioni:

$$I(\lambda) = \int_{\lambda} [A(Q) - A(M)] \frac{ds}{[(QM)^2 + z^2]^2}, \qquad J(\lambda) = \int_{\lambda} (QM)^2 \frac{ds}{[(QM)^2 + z^2]^2}.$$

Si hanno le identità:

$$\frac{I(s_1)}{J(s_1)} = \frac{I(s)}{J(s)} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{J(s_2)}{J(s)}} - \frac{I(s_2)}{J(s_1)}, \qquad \frac{I(s)}{J(s)} = \frac{I(s_1)}{J(s_1)} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{J(s_2)}{J(s_1)}} + \frac{I(s_2)}{J(s)}.$$

Ora si è già visto che

$$\lim_{z \to 0} J(s) = \lim_{z \to 0} J(s_1) = + \infty$$

mentre $J(s_2)$ resta finito; in modo analogo $I(s_2)$ resta finito, perchè:

$$|I(s_2)| < \int_{s_2} |A(Q) - A(M)| \frac{ds}{(QM)^4} < \frac{1}{a^4} \int_{s_2} |A(Q) - A(M)| \, ds$$

e allora le identità precedenti dimostrano che

$$\lim_{z \to 0} \frac{I(s)}{J(s)} = \lim_{z \to 0} \frac{I(s_1)}{J(s_1)}$$

quando uno dei due limiti esista.

b) *Si ha $\Phi(A + B) = \Phi A + \Phi B$, e per k costante $\Phi(kA) = k \cdot \Phi A$.*

c) *Se $A(Q)$ è funzione armonica in un intorno di M è $\Phi A(M) = 0$.*

In forza di a) potremo sostituire ad s un cerchio s_1, di centro M e raggio a, in cui $A(Q)$ sia armonica; avremo:

$$I(s_1) = \int_{s_1} [A(Q) - A(M)] \frac{ds}{[(QM)^2 + z^2]^2} = \int_0^a \int_0^{2\pi} [A(Q) - A(M)] \frac{\varrho \, d\varrho \, d\theta}{(\varrho^2 + z^2)^2}$$

introducendo coordinate polari; ed anche:

$$I(s_1) = \int_0^a \frac{\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2+z^2)^2}\left[\int_0^{2\pi} A(Q)\, d\theta - 2\pi A(M)\right] = 0,$$

per il teorema di Gauss. Segue senz'altro la tesi.

d) *Se* $A(Q) = (OQ)^2$ *dove* O *è un punto fisso, è* $\Phi A(M) = 1$.

Se M coincide con O, la cosa è immediata; nel caso opposto si ponga $A(Q) = A'(Q) + A''(Q)$ dove:

$$A'(Q) = (MQ)^2, \qquad A''(Q) = (OQ)^2 - (MQ)^2$$

donde

$$\Phi A(M) = \Phi A'(M) + \Phi A''(M).$$

Ora $\Phi A'(M) = 1$, come si è visto; $\Phi A''(M) = 0$ perchè $A''(Q)$ è funzione lineare delle coordinate di Q, ed è quindi armonica. Ne segue appunto $\Phi A(M) = 1$.

e) *Se la* $A(Q)$ *è massima (o minima) in* M *si ha* $\Phi A(M) \leqq 0$, $[\Phi A(M) \geqq 0]$.

Sia $A(Q)$ massima in M; esisterà un intorno circolare s_1 di M nel quale sarà

$$A(Q) - A(M) \leqq 0.$$

Sostituendo ad s questo intorno, come è lecito, abbiamo $I(s_1) \leqq 0$, $\frac{I(s_1)}{J(s_1)} \leqq 0$, e al limite, $\Phi A(M) \leqq 0$. Analogamente nel caso del minimo.

31. Siamo ora in grado di dimostrare un ultima proprietà dell'operatore Φ, con la quale la parte diretta del teorema enunciato al n° 28 potrà dirsi provata:

f) *Se in un dominio* s' *contenuto in* s *(o anche in tutto* s*)* $\grave{e}$ $\Phi A(M) = 0$, *la* $A(Q)$ *è armonica in* s'.

Si consideri un cerchio c, di centro O e raggio a, contenuto in s', e la funzione $A_1(M)$, armonica in c, che assume sul contorno di c i valori stessi che vi assume la $A(M)$. Essa è data dall'integrale di Poisson. Si ponga poi:

$$f(M) = A(M) - A_1(M) - \frac{A(O) - A_1(O)}{a^2}[a^2 - (OM)^2].$$

Si riconosce subito che $f(M)$ si annulla sul contorno di c, e anche nel suo centro O. Ne segue che $f(M)$ possiede nell'*interno* di c un punto H di massimo e uno K di minimo. Ciò è evidente se $f(M)$ prende in c valori di ambo i segni; se poi fosse sempre, per esempio $f(M) \geqq 0$, vi sarebbe entro c un massimo positivo, e un minimo nullo in O.

Si ha allora

$$\Phi f(H) \leqq 0, \qquad \Phi f(K) \geqq 0.$$

Ora dall'ipotesi, e dai teoremi c), d) si ha:

$$\Phi f(M) = \frac{A(O) - A_1(O)}{a^2}$$

che è costante. È dunque

$$\Phi f(M) = 0 \qquad \text{e} \qquad A(0) = A_1(0).$$

Ma $A_1(O)$ è la media dei valori che la $A_1(M)$, cioè la $A(M)$, assume sul contorno di c: è dunque verificata la proprietà caratteristica delle funzioni armoniche (cfr. n° 8) e $A(M)$ è armonica in s' [27]).

32. La reciproca del teorema ora dimostrato non richiede che un breve calcolo. Riprendiamo l'integrale di Bianchi:

$$V(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_s A(Q) \frac{ds}{r^4}$$

e scomponiamolo, al solito, nella parte relativa a un intorno circolare s_1 di un punto M interno ad s e nella parte residua; quest'ultima è analitica in M e quindi basterà occuparsi della prima

$$V_1(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_{s_1} A(Q) \frac{ds_1}{r^4}.$$

Si prenda P sulla normale in M al piano $z = 0$; eseguendo le consuete trasformazioni (cfr. n° 30, c) si trova:

$$V_1(P) = \frac{z_P^2}{\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} A(Q) \frac{\varrho\, d\varrho\, d\theta}{(\varrho^2 + z_P^2)^2} = \frac{z_P^2}{\pi} \int_0^a \frac{\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + z_P^2)^2} \int_0^{2\pi} A(Q)\, d\theta$$

e se $A(Q)$ è armonica:

$$V_1(P) = 2 z_P^2 A(M) \int_s^a \frac{\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + z_P^2)^2} = \frac{a^2 A(M)}{a^2 + z_P^2}.$$

---

[27]) Il complesso delle proposizioni dimostrate in a) ... f) a proposito dell'operatore Φ fa presumere che esso, a meno di un fattore costante debba coincidere con un laplassiano generalizzato, cioè con un operatore che, sotto convenienti condizioni qualitative per la funzione cui si applica, dà l'ordinario Δ_2 della funzione.

La d) suggerisce anzi per tali casi la relazione $\Phi A = \frac{1}{4} \Delta_2 A$. Effettivamente è facile provare che tale relazione sussiste se $A(Q)$ è due volte differenziabile; in particolare se ammette derivate parziali prime e seconde continue.

Si noti che la dimostrazione di f) è applicabile a tutte le estensioni del laplassiano che soddisfano alle condizioni a) ... e); essa è ispirata ad una delle dimostrazioni del teorema di Schwarz sulla derivata seconda generalizzata (v. Lebesgue, Séries trigonométriques, Paris 1906, pag. 7). Un'altra dimostrazione, valida nelle stesse condizioni, è stata data di recente da Colucci (Rend. Lincei, 6ª, 7, (1928)).

Questa espressione che, com'era prevedibile, si riduce ad $A(M)$ per $z_P = 0$, ammette per $z_P = 0$ derivate prime e seconde rispetto a z_P determinate e finite, aventi i valori rispettivi 0 e $-\frac{A(M)}{a^2}$.

Non sarà inutile notare che, per $A(Q)$ armonica, anche le condizioni di derivabilità rispetto alle altre due variabili sono implicitamente soddisfatte.

33. Il risultato del numero precedente si ottiene assai più rapidamente, e cioè senz'alcun calcolo, e arrichito anzi di un complemento importantissimo, nel modo seguente.

La funzione armonica $A(x, y)$, come funzione di P, è definita nel cilindro di base s parallelo all'asse z; si riconosce subito che essa è in questo cilindro soluzione regolare della (A). Tale è perciò anche, in un cilindro finito di base s e altezza abbastanza piccola, la $W(P) - A(x, y)$, la quale, annullandosi su s, è analitica anche nei punti di s. Ma anche $A(x, y)$, come funzione armonica, è analitica, onde tale sarà anche la $W(P)$. *A fortiori*, ammetterà in s le richieste derivate.

Vogliamo ora provare che lo sviluppo in serie di potenze della $W(P)$ nell'intorno dei punti di s (sempre per $z > 0$) si può ottenere dalla conoscenza dei valori $A(x, y)$ della $W(P)$ su s e dei valori $B(x, y)$ della $\frac{\partial^2 W(P)}{\partial z^2}$, pure su s, in modo perfettamente determinato. Ed infatti, dalla (A), derivando n volte e facendo poi $z = 0$ si ha:

$$n^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^{n-1} W(P)}{\partial z^{n-1}}\right)_{z=0} = \left(\frac{\partial^{n+1} W(P)}{\partial z^{n+1}}\right)_{z=0},$$

relazione ricorrente dalla quale, con le condizioni iniziali

$$\left(\frac{\partial W(P)}{\partial z}\right)_{z=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 W(P)}{\partial z^2}\right)_{z=0} = B(x, y)$$

si ottengono i valori delle derivate di ogni ordine rispetto a z. Precisamente

$$\left(\frac{\partial^3 W(P)}{\partial z^3}\right)_{z=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^4 W(P)}{\partial z^4}\right)_{z=0} = 1 \cdot 3 \, \Delta_2 B(x, y), \qquad \left(\frac{\partial^5 W(P)}{\partial z^5}\right)_{z=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^6 W(P)}{\partial z^6}\right)_{z=0} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \, \Delta_4 B(x, y), \ldots$$

e in generale:

$$\left(\frac{\partial^{2n+1} W(P)}{\partial z^{2n+1}}\right)_{z=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^{2n} W(P)}{\partial z^{2n}}\right)_{z=0} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1) \, \Delta_{2n-2} B(x, y)$$

e lo sviluppo cercato ha la forma:

$$W(x, y, z) = A(x, y) + \sum_1^\infty \frac{z^{2n}}{2^n n!} \Delta_{2n-2} B(x, y).$$

Concludendo: *Una soluzione $W(P)$ della* (A) *regolare in un dominio τ di 2^a specie del semispazio $z \geqq 0$, che ammette derivate prime e seconde pure rispetto a tutte le variabili nei punti di un dominio s del contorno di τ sul piano $z = 0$ è analitica, nei punti di s. Il suo sviluppo in serie di potenze di z nell'intorno dei punti di s è perfettamente determinato dalla conoscenza dei valori che su s assumono la soluzione e la sua derivata seconda rispetto a z, e contiene solo potenze pari di z.*

34. Con le ricerche precedenti è ormai spianato ogni ostacolo alla risoluzione delle questioni più interessanti relative alle soluzioni della (A) regolari nei domini di 3^a specie: unicità ed esistenza delle soluzioni per dati valori al contorno, analiticità.

Sia τ un dominio di 3^a specie, avente cioè nel suo interno punti (e quindi un dominio) del piano $z = 0$. Da questo piano τ sarà diviso in due domini di 2^a specie τ', τ''; se per esempio, τ' è nel semispazio $z > 0$, il suo contorno sarà costituito dai punti del contorno di τ nel semispazio $z > 0$, da certi punti di contorno di τ sul piano $z = 0$ e da tutto l'insieme aperto I costituito dai punti interni a τ su questo piano (e che può anche non essere connesso). In qualunque caso I e il suo contorno appartengono al contorno di τ' e a quello di τ''.

Una soluzione $W(P)$ della (A), regolare in τ, ha derivate prime e seconde pure determinate e finite nei punti di I, quindi si riduce su I ad una funzione armonica (o, meglio, ad una funzione armonica per ogni pezzo connesso di I).

Ciò posto, per ciò che riguarda i teoremi connessi al principio di unicità:

a) *Vale per i domini di 3^a specie la proprietà* a) *del* n° 7, *se i massimi e i minimi si intendono in senso stretto; non vale se essi vengono intesi nel senso generale.*

Ed infatti, un punto di massimo o di minimo per la $W(P)$ non può essere interno a τ', nè a τ'' (n° 7), nè può appartenere ad I senza essere punto di massimo o minimo per la funzione armonica a cui $W(P)$ si riduce nei punti di I; ciò che è assurdo se tale funzione non è costante nell'intorno del punto. E non si ha allora massimo o minimo in senso stretto.

Un semplice esempio, che giustifica completamente l'enunciato, è la soluzione $W(P) = z_P^2$, minima in tutto il piano $z = 0$.

b) *Vale*, tuttavia, *la proprietà* b) *del* n° 7. Ed infatti, se la $W(P)$, regolare in τ, è continua al contorno, il suo valore massimo (e il minimo), non possono venire assunti nell'interno, se ciò non avvenga in un punto P_1

dell'insieme I. Ma allora la $W(P)$ è costante in tutta la parte I_1 di I connessa con P_1 e anche nel contorno di I_1, che è pure contorno di I, e di τ. Onde il valore massimo e il minimo vengono assunti da $W(P)$ *anche* sul contorno di τ.

c) *Valgono*, per conseguenza, *le proprietà* c) d) *del* n° 7, *e cioè il terrema di unicità per i domini di* 3ª *specie.*

Queste proprietà si possono estendere, come allo stesso n° 7, a certi casi di discontinuità al contorno, però con essenziali limitazioni per il caso di discontinuità sul piano $z = 0$. Daremo solo un semplice esempio.

Sia τ una sfera geodetica, π_0 la sua sezione col piano $z = 0$; ω_P^* l'angolo solido iperbolico determinato da un punto P dello spazio e da π_0. La funzione ω_P^*, data come sappiamo, da

$$\omega_P^* = \frac{z_P^2}{\pi} \int_{\pi_0} \frac{d\pi_0}{r^4}$$

è soluzione regolare della (A) nell'interno della sfera, tende a 2π se P tende a un punto M del contorno, non situato sul piano $z = 0$, ed è limitata. Pure essa non coincide con la soluzione costante 2π; ed infatti essa si annulla nei punti interni a π_0.

35. Per ciò che riguarda l'analiticità delle soluzioni regolari nei domini di 3ª specie, sappiamo che essa sussiste nei domini parziali di 2ª specie τ', τ''; compreso il contorno I. Esistono dunque nell'intorno di un punto di I due sviluppi in serie di Taylor della $W(P)$, uno valido nell'intorno superiore $z \geqq 0$, l'altro nell'inferiore $z \leqq 0$. Ma abbiamo visto che tali sviluppi sono unicamente determinati dalla conoscenza dei valori della $W(P)$ e della sua derivata seconda rispetto a z nell'intorno del punto in I, valori che sono identici, per l'ipotesi della regolarità, sia per $z = +0$ che per $z = -0$. Concludiamo che questi sviluppi coincidono; ossia che:

Una soluzione della (A) *regolare nell'interno di un dominio* τ (di qualunque specie) *è ovunque analitica entro il dominio.*

La proprietà, già notata, dello sviluppo, di contenere solo potenze pari di z, ci dà poi il risultato:

Una soluzione della (A), *regolare nell'interno di un dominio di* 3ª *specie, è funzione pari di* z.

Ciò consente di enunciare, per ciò che riguarda il problema di esistenza, l'interessante risultato negativo:

d) *Non esiste in generale una soluzione della* (A) *regolare in un dato dominio* τ *di* 3ª *specie e che assuma sul contorno di* τ *valori assegnati.*

Ciò è evidente se τ è simmetrico rispetto al piano $z = 0$; per l'esistenza della soluzione è in tal caso necessario che i valori deposti sui punti simmetrici del contorno siano uguali. Per il caso generale, e in modo più esauriente, si osservi che la soluzione incognita $W(P)$ è nota nei punti di contorno dell'insieme I, ove si riduce a una funzione armonica, quindi univocamente determinata in I (ammesso solubile per I il problema di Dirichlet); è allora nota sul contorno di τ', quindi in τ'. Essa sarà allora prolungabile analiticamente oltre I (per riflessione) e questo prolungamento dovrà esistere in tutto τ'' ed assumere sul contorno di τ'' precisamente i valori prescritti.

È evidente che, ammessi anche risolubili i considerati problemi di valori al contorno, quest'ultima condizione non sarà in generale soddisfatta. Se però fosse verificata, il procedimento indicato costituirebbe un effettivo metodo di risoluzione del problema. Un altro metodo sarebbe dato evidentemente dalla risoluzione di due problemi di valori al contorno per i domini parziali τ' e τ'', previa risoluzione dell'ordinario problema di Dirichlet per I; la condizione di risolubilità del problema dato per τ consiste allora nella uguaglianza delle derivate seconde rispetto a z, a destra e a sinistra, (certamente esistenti) nei punti di I.

36. Per quanto immediata conseguenza dei risultati di questo capitolo, non stimiamo inutile enunciare esplicitamente la seguente proprietà, che risolve in modo completo il problema della prolungabilità delle soluzioni oltre il piano $z = 0$.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una soluzione della (A) *esistente in un dominio del semispazio* $z > 0$ *possa prolungarsi regolarmente oltre il piano* $z = 0$ *è che essa possa prolungarsi nel semispazio sino a contenere un dominio del piano* $z = 0$ *ove essa si riduca a una funzione armonica. Il prolungamento è analitico e avviene per riflessione, cioè con la semplice posizione*

$$W(x, y, -z) = W(x, y, z).$$

Appendice.

37. Esaurite così le ricerche che formano lo scopo principale del presente lavoro, si presenta spontanea la domanda, se e in quale misura i risultati in esse ottenuti possano estendersi alla equazione:

$$(\beta') \qquad x_n \Delta_2 U - (n-2)\frac{\partial U}{\partial x_n} = 0$$

relativa allo spazio iperbolico ad n dimensioni, per $n > 3$.

Esamineremo succintamente la questione, ponendo per comodità

$$n = m + 1, \qquad x_n = z$$

e scrivendo perciò la (β') nella forma:

$$(\beta'') \qquad z\,\Delta_2 U - (m-1)\frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

Anzitutto, dal perfetto parallelismo tra la teoria delle funzioni armoniche nello spazio iperbolico e nell' euclideo, le ragioni del quale furono messe in luce nell' *Introduzione*, e, d' altra parte, dall' analogia pure perfetta che vi è, nel caso euclideo, tra il caso $n = 3$ e i casi superiori, è da presumere che tutto ciò che riguarda i domini di 1ª specie possa essere senz' altro estendersi ai casi superiori, con opportune modificazioni formali. Senza scendere a particolari, daremo qui le principali modificazioni richieste a tale scopo e in base alle quali si verifica con facilità la nostra asserzione.

Come soluzione elementare della (β') si trova la:

$$\Omega(P, Q) = -\int \left(\frac{1-u^2}{2u}\right)^{m-1} \frac{du}{u}, \qquad u = \frac{r}{r_1}$$

e cioè una funzione razionale di $\frac{r}{r_1}$, aumentata, per m dispari, di un termine in $\log \frac{r}{r_1}$.

L' angolo solido iperbolico elementare ha per $z_Q \neq 0$ la forma:

$$d\omega_P^* = \frac{1}{z_Q^{m-1}} \frac{\partial \Omega(P, Q)}{\partial n} d\sigma;$$

essa può trasformarsi in modo da renderla valida anche per $z_Q = 0$; si ha per esempio:

$$d\omega_P^* = \frac{(2z_P)^{m-1}}{(r r_1)^m} \cdot \left(r \frac{dr_1}{dn} - r_1 \frac{dr}{dn}\right) d\sigma = \left(\frac{2z_P}{r r_1}\right)^m \cos(nt)$$

col solito significato dei simboli.

Per le soluzioni della (β'') regolari in un ipersfera e continue al contorno si hanno i teoremi di media

$$U(P)\int_\sigma \frac{d\sigma}{z_Q^m} = \int_\sigma U(Q)\frac{d\sigma}{z_Q^m}; \qquad U(P)\int_\tau \frac{d\tau}{z_Q^{m+1}} = \int_\tau U(Q)\frac{d\tau}{z_Q^{m+1}}$$

donde seguono il principio di unicità e i teoremi connessi.

Nulla è in sostanza da innovare nella teoria del potenziale iperbolico di doppio strato; in particolare nelle applicazioni al problema del semispazio iperbolico (semi-ipersfera geodetica) e all' integrale di Bianchi, che

ha in generale la forma:

$$W(P) = \frac{2^m z_P^m}{\lambda_{m+1}} \int_{\pi_0} U(Q) \frac{d\pi_0}{r^{2m}}$$

dove

$$\lambda_{m+1} = \frac{2\pi^{\frac{m+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}$$

è l'estensione superficiale della ipersfera unitaria nell' S_{m+1}. Onde anche per i domini di 2ª specie i risultati ottenuti per $m = 2$ nel cap. 3 della Memoria. Anche la teoria svolta nel cap. 4 si estende senza modificazioni essenziali.

Ben diverso è il caso della teoria svolta nel cap. 5 per i domini di 3ª specie, in quanto per $m > 2$ si rivelano impossibili le deduzioni del testo; nè riesce facile sostituirle con altre altrettanto semplici ed esaurienti. Nè ciò deve sorprendere, giacchè è agevole costruire esempi in cui le conclusioni valide per $m = 2$ vengono poste in difetto, subentrando ad esse circostanze che hanno un largo carattere di indeterminazione.

Un primo indizio di tale mutamento si ha nella seguente considerazione, corrispondente ad una svolta nel n° 28. La soluzione $W(P)$ della (β'') sia regolare nel dominio τ di seconda specie, di contorno $\sigma + \pi_0$ (i simboli hanno qui il solito significato); e su π_0 sia continua e ammetta derivate prime e seconde pure determinate e finite. Su π_0 la $W(P)$ si riduca alla funzione $A(x_i)$ delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Dalla (β'') si ha, per $z = 0$, $\frac{\partial W}{\partial z} = 0$; poi, scrivendo la (β'') nella forma:

$$\Delta_2 W(P) = (m-1) \frac{W_z'(x_i, z) - W_z'(x_i, 0)}{z}$$

si ha, passando al limite per $z \to 0$ e supponendo continue le derivate seconde:

$$\text{(a)} \qquad \Delta_2 A(x_i) = (m-2) W_z''(x_i, 0).$$

Questa relazione, che per $m = 2$ esprime l'armonicità della $A(x_i)$, che ci fu prezioso sussidio nel cap. 5 del testo, ha per $m > 2$ carattere completamente diverso, per la presenza delle derivate seconde normali della soluzione.

Differenze ugualmente essenziali si riscontrerebbero anche quando, rinunziando alla continuità delle derivate seconde per $z = 0$, si volesse imitare il procedimento dei n° 29 e seguenti; onde per la studio delle derivate sullo spazio limite si impone la considerazione diretta del limite

corrispondente a quello indicato con (C') al n° 28; e cioè:

$$\lim_{z\to 0} \frac{2^m z^{m-2}}{\lambda^{m+1}} \int_s [A(Q) - A(M)] \frac{ds}{r^{2m}}.$$

Ora si trova che per $m > 2$ le condizioni da imporre alla funzione $A(Q)$ per l'esistenza di questo limite sono puramente qualitative, sì da lasciare alla funzione stessa una grandissima arbitrarietà. Basta, per esempio, che la $A(Q)$ sia due volte differenziabile nel senso di Stolz, cioè che, assunto per comodità M come origine delle coordinate, si abbia

$$A(Q) - A(M) = \sum p_i x_i + \frac{1}{2} \sum q_{ik} x_i x_k + \varepsilon \varrho^2$$

con ε infinitesimo con ϱ, perchè il limite in questione esista; esso coincide, a meno di un fattore numerico, con $\Delta_2 A$, come del resto era prevedibile. Tenuto conto poi che le soluzioni nulle su un dominio dello spazio limite sono ivi infinitesime di ordine m rispetto a z, e quindi, per $m > 2$, le loro derivate seconde rispetto a z vi si annullano, si riconosce che le dette derivate seconde dipendono solo dai valori della $A(x_i)$ stessa nell'intorno del punto; nell'ipotesi della doppia differenziabilità vale anzi la (a).

Ciò posto, le questioni di esistenza e di unicità si discutono rapidamente. Si riprendano le ipotesi e le notazioni del n° 34; assegnati con continuità i valori di una soluzione sul contorno di τ, i valori di essa sull'insieme aperto I non sono più determinati in modo unico dai valori al contorno dello stesso I, bastando, come si è visto, la doppia differenziabilità su I; e la determinazione, che nei casi usuali sarà certo possibile, presenterà una grande arbitrarietà. Per ogni scelta di questi valori, cioè della funzione $A(x_i)$ si avranno poi da risolvere due problemi di valori al contorno per i domini di 2ª specie τ', τ''; nelle ipotesi poste le soluzioni avranno comuni su I non solo i valori, ma anche le derivate prime — nulle — e le derivate seconde, in quanto queste dipendono solo dai valori della $A(x_i)$. Onde esse si raccorderanno in un'unica soluzione regolare in τ che soddisferà al contorno alle condizioni date. Dunque per $m > 2$ (o $n > 3$) *il problema dei valori al contorno è da ritenersi in generale indeterminato*, ed in larghissima misura.

In casi speciali, come quello della ipersfera geodetica, si potranno avere espressioni esplicite delle soluzioni, mediante le quali verrà messa in piena luce la natura dell'indeterminazione, e potranno aversi esempi semplici dei fatti indicati.

Le questioni di unicità e di analiticità vengono implicitamente risolte in senso negativo. Del resto, un semplicissimo esempio in cui il raccordo delle soluzioni attraverso lo spazio limite è regolare, ma non analitico, è il

seguente; la soluzione valga z^m per $z \geqq 0$ e 0 per $z \leqq 0$: per $z = \pm 0$ le derivate prime e seconde hanno lo stesso valore[28]).

Non è da escludere, ed anzi sembra probabile, che il problema dei valori al contorno per $n > 3$ divenga determinato ponendo per le derivate sullo spazio limite condizioni più restrittive; per es. imponendo l'esistenza di derivate terze, o quarte ecc. o a dirittura l'analiticità; è però da notare che in tal caso le condizioni poste non sono più quelle strettamente necessarie perchè l'equazione proposta abbia significato.

Indice.

pagina

Introduzione 45
1. La soluzione elementare 49
2. I teoremi di Green e di Gauss e le loro conseguenze . . 54
3. Il potenziale iperbolico di doppio strato e le sue applicazioni 63
4. Il teorema di esistenza per i domini di 2ª specie . . . 76
5. Soluzioni regolari nei domini di 3ª specie 83
Appendice 92

Torino, Agosto 1928.

---

[28]) La posizione particolare che il caso $n = 3$ ha per la nostra equazione presenta curiose analogie con quella che il caso $n = 2$ ha per l'ordinaria equazione di Laplace. In ambedue i casi le differenze si manifestano nel comportamento all'infinito e come loro radice comune si trova il carattere speciale dell'integrale di x^α per $\alpha = -1$.

(Eingegangen am 31. Januar 1929.)

Zur Theorie der Limitierungsverfahren.

(Erste Mitteilung.)

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Einleitung.

Als Grundformen aller Grenzprozesse der Analysis kann man die Bildung des Grenzwertes einer Zahlenfolge $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ für $n \to +\infty$ oder desjenigen einer Funktion $f(x)$ für $x \to +\infty$ ansehen. Beide sind nicht wesentlich voneinander verschieden. Denn die Untersuchung von s_n für $n \to +\infty$ kann vollständig durch diejenige der „Treppenfunktion“ $f(x)$ ersetzt werden, die durch die Gleichungen

$$(1) \qquad f(x) = s_n \quad \text{für} \quad n \leqq x < n+1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

oder durch diejenige des „Polygonzugs“ $f(x)$, der durch die Gleichungen

$$(1') \qquad f(x) = s_n + (x-n)(s_{n+1} - s_n) \quad \text{für} \quad n \leqq x \leqq n+1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

definiert ist[1]); und umgekehrt kann die Untersuchung einer Funktion $f(x)$ für $x \to +\infty$ vollständig durch diejenige aller Zahlenfolgen $f(x_n)$ mit $x_n \to +\infty$ ersetzt werden. Man kann also nach Belieben die eine oder andere der beiden Formen als *die* Grundform aller Grenzprozesse betrachten. Welche der beiden man wählt, ist schließlich gleichgültig; jede Wahl bietet im weiteren Verlauf der Untersuchung gewisse Vorteile und Nachteile. Da indessen die Treppenfunktion (1) fast als identisch mit der Zahlenfolge angesehen werden kann, so erscheint es zunächst günstiger, den Grenzprozeß

$$(2) \qquad f(x) \quad \text{für} \quad x \to +\infty$$

als diese Grundform zu betrachten. Unter den Funktionen sind dann im besonderen auch die Zahlenfolgen als enthalten anzusehen.

[1]) Die Stufen der Treppenfunktion bzw. die Ecken des Polygonzuges brauchen nicht notwendig bei den ganzen Zahlen $n = 0, 1, 2, \ldots$ zu liegen; vgl. hierzu § 3, 11., wo diese triviale Bemerkung sich als sehr erheblich erweist.

Die *Theorie divergenter Prozesse* setzt nun ein, wenn $\lim f(x)$ für $x \to +\infty$ nicht existiert. Es ist dann oft durch die mannigfachsten Verfahren möglich, die Funktion $f(x)$ so in eine andere Funktion $g(y)$ zu transformieren, daß der Grenzwert $\lim g(y)$ für $y \to +\infty$ existiert und daß dieser den fehlenden Grenzwert von $f(x)$ für $x \to +\infty$ überall da zu ersetzen vermag, wo er uns fehlt. Am bekanntesten ist wohl bei unendlichen Zahlenfolgen $(s_0, s_1, \ldots)$ das Verfahren der arithmetischen Mittel oder das M-Verfahren: Ist $\lim s_n$ nicht vorhanden, so geht man zu der Folge der arithmetischen Mittel

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

über. In vielen Fällen, z. B. bei der Folge $s_n \equiv 1, 0, 1, 0, \ldots$, ist nun $\lim t_n$ vorhanden und sein Wert (beim Beispiele der Wert $\frac{1}{2}$) vermag sehr oft den fehlenden Grenzwert der Folge (s_n) zu ersetzen.

Jedes Verfahren dieser Art, durch das also ein divergenter Grenzprozeß in einen konvergenten transformiert wird, nennt man ein *Limitierungsverfahren*. Da deren viele eingeführt sind, unterscheidet man sie durch vorgesetzte Buchstaben und spricht demgemäß von einem A-Verfahren, M-Verfahren, V-Verfahren usw. Den durch ein solches Verfahren gewonnenen Grenzwert, der also in der Borelschen Ausdrucksweise eine *limite généralisée* darstellt, bezeichnet man analog als $A\text{-}\lim f(x)$, $M\text{-}\lim f(x)$, $V\text{-}\lim f(x)$ usw. für $x \to +\infty$.

Im Verlauf der drei Jahrzehnte, die seit der bewußten Schaffung einer Theorie divergenter Prozesse durch Borel vergangen sind, ist schon von vielen Autoren der Versuch einer einheitlichen Auffassung oder Herleitung der allgemeinsten Limitierungsverfahren gegeben worden[2]). Keiner dieser

[2]) Es seien hierzu die folgenden Arbeiten hervorgehoben:

E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1. Aufl. 1901, 2. Aufl. 1928.

G. H. Hardy and S. Chapman, A general view of the theory of summable series, Quart. Journ. Math. **42** (1911), p. 181—215.

S. Chapman, On the general theory of summability, with applications to Fourier's and other series, Quart. Journ. Math. **43** (1912), p. 1—52.

O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, Prace mat.-fiz. **22** (1911), S. 113—119.

L. L. Silverman, On the notion of summability for the limit of a function of a continuous variable, Trans. Amer. Math. Soc. **17** (1916), p. 284—294.

T. Kojima, Theorems on convergent integrals, Tohoku Math. Journ. **14** (1918), p. 64—79.

O. Perron, Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen, Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 286—310.

M. Picone, Sui metodi di sommazione delle serie, Ann. di Mat. (4) **2** (1925), p. 263—295.

Versuche konnte auf die Dauer befriedigen, da die Entwicklung der Theorie bisher jeden Rahmen, der alle Verfahren zu umspannen versuchte, wieder gesprengt hat. Wenn ich nun im *ersten Teil* der folgenden Arbeit einen neuen Versuch dieser Art unternehme, so wird er das Schicksal seiner Vorgänger teilen. Da er aber in mehrfacher Hinsicht dem gegenwärtigen Stand der Theorie besser gerecht wird als die älteren Versuche, so mag er nicht überflüssig sein. Seinen Vorzug vor den bisherigen Versuchen ähnlicher Art sehe ich in folgendem:

Das Wesentliche aller Limitierungsverfahren besteht doch offenbar darin, daß ein vorgelegter Grenzprozeß in einen anderen transformiert wird und daß bestimmte Aussagen über die Beziehungen zwischen beiden gemacht werden. Bei der Theorie divergenter Reihen, wie sie bisher fast ausschließlich behandelt wurde, wird stets eine Zahlenfolge (s_n), nämlich die Teilsummen der Reihe, in eine andere Zahlenfolge (t_n), vgl. das obige Beispiel, oder allgemeiner in eine Funktion $g(y)$ transformiert, und es werden dann bestimmte Aussagen über die Beziehungen zwischen dem infinitären Verhalten von s_n einerseits und dem von t_n bzw. $g(y)$ für $y \to +\infty$ andrerseits gemacht. Hierbei handelt es sich also um eine Transformation von *Folgen in Folgen* oder von *Folgen in Funktionen*. Unsere allgemeine Form solcher Verfahren wird aber darüber hinaus so gestaltet sein, daß sie auch die Transformation von *Funktionen in Funktionen* als Spezialfall umfaßt, daß sie also beliebige Grenzprozesse der Form $f(x)$ für $x \to +\infty$ (oder $x \to \xi$) in analoger Weise zu transformieren und zu untersuchen gestattet und damit auch alle Begriffe, die, wie Stetigkeit oder Differenzierbarkeit, auf solchen Grenzprozessen beruhen. Endlich aber wird unser allgemeiner Ansatz auch gestatten — und der damit hergestellte Zusammenhang auseinanderliegender Theorien scheint mir bisher am wenigsten beachtet worden zu sein —, *Funktionen in Folgen* zu transformieren und damit die Entwicklung von Funktionen in Reihen (die offenbar solche Transformationen sind) mit zu umfassen. In der Tat handelt es sich ja z. B. in der Theorie der Fourierreihen gerade darum, aus dem Verhalten einer Funktion $f(x)$ für $x \to x_0$ auf das Verhalten einer Zahlenfolge zu schließen, die durch einen Transformationsprozeß der in Rede stehenden Art aus der Funktion hergeleitet worden ist.

Im *zweiten Teil* beweise ich dann einen sehr allgemeinen Satz über alle „echten“ Limitierungsverfahren (Def. s. I, § 2), der nicht nur die Permanenzsätze für alle diese Verfahren als Spezialfälle enthält, sondern darüber hinaus auf die Natur der Grenzprozesse selbst, sowie auf das gegenseitige Verhältnis der Limitierungsverfahren Licht zu werfen und scheinbar sehr auseinanderliegende Tatsachen aus einer gemeinsamen Quelle heraus zu erklären vermag.

In einer späteren Mitteilung werde ich die vorliegenden Untersuchungen auf den Fall ausdehnen, daß Scharen von Grenzprozessen betrachtet werden, diese also noch von einem (oder mehreren) Parametern abhängen. Dadurch können unsere Ergebnisse auch für Funktionenfolgen bzw. Funktionen von mehreren Veränderlichen nutzbar gemacht werden.

I. Teil.

§ 1.

Ein allgemeines Limitierungsverfahren.

Der Grundform (2) aller Grenzprozesse kann man, ohne sachlich etwas daran zu ändern, eine Form geben, die für die Anwendungen etwas mehr Bewegungsfreiheit gibt. Dazu werde in der komplexen x-Ebene durch die Parameterdarstellung

$$(\mathfrak{C}_x) \qquad x = x(t), \qquad 0 \leqq t < \tau_x,$$

eine orientierte stetige Kurve $\mathfrak{C}_x$ vorgelegt. Ist $0 < t_1 < \tau_x$, so soll das für $0 \leqq t \leqq t_1$ erhaltene Stück von $\mathfrak{C}_x$ rektifizierbar sein; es sei ferner $x(0) = x_0$ und für wachsende $t \to \tau_x$ ($<$ oder $= +\infty$) strebe $x(t) \to \xi$ ($\neq$ oder $= \infty$). Auf $\mathfrak{C}_x$ sei nun die komplexe Funktion $f(x)$ definiert, doch so, daß $f(x)$ für jedes t_1 in $0 < t_1 < \tau_x$ im Intervall $0 \leqq t \leqq t_1$ beschränkt ist, und es handle sich um die Untersuchung von

$$(3) \qquad f(x) \text{ für } x \to \xi \text{ längs } \mathfrak{C}_x.$$

Fast alle bis heute tatsächlich benutzten Limitierungsverfahren sind nun von folgender Form:

Man wählt in der komplexen y-Ebene in ganz analoger Weise wie eben eine Kurve $\mathfrak{C}_y$ durch die Darstellung

$$(\mathfrak{C}_y) \qquad y = y(t), \qquad 0 \leqq t < \tau_y$$

mit $y(0) = y_0$ und $y(t) \to \eta$ für wachsende $t \to \tau_y$; man wählt weiter eine Funktion $\varphi(x, y)$, die für jedes x auf $\mathfrak{C}_x$ und jedes y auf $\mathfrak{C}_y$ definiert ist und für die

$$(4) \qquad \int_{x_0}^{\xi}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(x, y) f(x)\, dt = g(y)$$

für jedes y auf $\mathfrak{C}_y$ existiert[3]), und untersucht an Stelle von (3) den Grenzprozeß

$$(5) \qquad g(y) \text{ für } y \to \eta \text{ längs } \mathfrak{C}_y.$$

---

[3]) In welchem Sinne das Integral zu nehmen ist, ist hier zunächst gleichgültig; er ist nur weiterhin festzuhalten.

Führt er im Sinne gewöhnlicher Konvergenz zu einem Grenzwert a, so sagen wir, *für* $x \to \xi$ *längs* $\mathfrak{C}_x$ *sei* $f(x)$ *durch das beschriebene Verfahren limitierbar zum Werte* a. Bezeichnen wir dies Verfahren kurz mit V, so sagen wir kürzer, $f(x)$ *sei* V*-limitierbar zum Werte* a (für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$) und schreiben dafür

$$V\text{-}\lim_{x \to \xi} f(x) = a.$$

Von der Funktion $g(y)$ sagen wir auch, *sie gehe durch* V*-Transformation aus* $f(x)$ *hervor* oder sie sei die V*-Transformierte von* $f(x)$.

Wir fragen zunächst, wann ein solches Verfahren V der *Permanenzbedingung* genügt oder wann es ein *reguläres* Verfahren ist, wann also aus der Existenz des gewöhnlichen Grenzwertes $\lim f(x) = a$ stets auch $V\text{-}\lim f(x) = a$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ folgt. Hierüber gilt in genauer Analogie zu den nun schon klassischen Sätzen dieser Art der folgende

Satz 1. *Das soeben definierte* V*-Verfahren ist sicher dann regulär, wenn* $\varphi(x, y)$ *die folgenden drei Bedingungen erfüllt*:

a) *Für jedes* y *auf* $\mathfrak{C}_y$ *existiert*

$$^{(\mathfrak{C}_x)}\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x, y)\, dt = \Phi(y)$$

und es strebt $\Phi(y) \to 1$ *für* $y \to \eta$ *längs* $\mathfrak{C}_y$.

b) *Für je zwei feste Punkte* x_1 *und* x_2 *auf* $\mathfrak{C}_x$ *existiert*

$$^{(\mathfrak{C}_x)}\int_{x_1}^{x_2} |\varphi(x, y)|\, dt$$

und strebt $\to 0$ *für* $y \to \eta$ *längs* $\mathfrak{C}_y$.

c) *Es gibt eine positive Zahl* M, *so daß für alle* x *auf* $\mathfrak{C}_x$ *und alle* y *oder wenigstens alle hinreichend nahe bei* η *gelegenen* y *auf* $\mathfrak{C}_y$

$$^{(\mathfrak{C}_x)}\int_{x_0}^{x} |\varphi(x, y)|\, dt \leqq M$$

bleibt.

Beweis. Es strebe $f(x) \to a$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$. Da dann

$$g(y) - a = {}^{(\mathfrak{C}_x)}\int_{x_0}^{\xi} \varphi(x, y)\,(f(x) - a)\, dt + (\Phi(y) - 1)\, a,$$

so genügt es, wegen a), zu zeigen, daß das Integral rechts gegen 0 strebt für $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_y$. Ist aber $\varepsilon > 0$ gegeben, so kann man $t_1 > 0$ so wählen, daß für $t_1 \leqq t < \tau_x$ stets $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ bleibt. Dann ist aber, wenn $x(t_1) = x_1$ gesetzt wird und wenn für $0 \leqq t \leqq t_1$ stets

$|f(x)-a| \leqq K$ bleibt, wegen c)

$$\left| \int_{x_0}^{\xi}{}^{(\mathfrak{C}_x)} \varphi(x,y)\,(f(x)-a)\,dt \right| \leqq K \cdot \int_{x_0}^{x_1}{}^{(\mathfrak{C}_x)} |\varphi(x,y)|\,dt + \frac{\varepsilon}{2M} M.$$

Nach Bedingung b) ist dies also $< \varepsilon$, sobald y auf $\mathfrak{C}_y$ hinreichend nahe an η [4]) herangerückt ist.

Wir setzen nun gleich weiter fest: Beruht die Definition irgendeiner Eigenschaft einer Funktion $f(x)$ auf der Existenz eines Grenzwertes von $f(x)$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$, *so soll ihr diese Eigenschaft noch in der V-Verallgemeinerung zugesprochen werden, falls der betreffende Grenzwert wenigstens als V-Limes existiert.*

a) Ist z. B. $f(x)$ noch in ξ definiert und ist für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$

$$V\text{-}\lim f(x) = f(\xi),$$

so ist $f(x)$ in ξ als *V-stetig* längs $\mathfrak{C}_x$ zu bezeichnen.

b) Ist $\xi \neq \infty$ und ist unter den Voraussetzungen von a)

$$V\text{-}\lim \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = b \qquad (\text{für } x \to \xi \text{ längs } \mathfrak{C}_x),$$

so ist $f(x)$ in ξ als *V-differenzierbar* mit b als Wert der V-Derivierten zu bezeichnen.

c) Ist endlich — im allgemeinen Falle — die Funktion $g(y)$ auf $\mathfrak{C}_y$ von beschränkter totaler Variation [5]), so soll $f(x)$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ *absolut V-limitierbar*, kurz: $|V|$-limitierbar [6]), genannt werden.

§ 2.

Spezialisierungen. Die echten Limitierungsverfahren.

Man erkennt nun leicht, daß in dem beschriebenen allgemeinen Limitierungsverfahren alle bisher angegebenen speziellen Verfahren oder Klassen von solchen als Spezialfälle enthalten sind:

1. Sind $\mathfrak{C}_x$ und $\mathfrak{C}_y$ die positiv-reellen Achsen je in ihrer Ebene, ist $f(x) = s_\nu$ für $\nu \leqq x < \nu+1$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, so daß es sich um die Limitierung der Zahlenfolge (s_n) handelt (oder also um die Summierung

[4]) Für $\eta = \infty$ ist dies natürlich wie üblich zu interpretieren.

[5]) D. h. $g(y)$ soll als Funktion von t in $0 \leqq t \leqq t_1$ eine totale Variation haben, die für alle $t_1 < r_y$ unterhalb einer festen Schranke bleibt.

[6]) Diese bequeme Bezeichnung findet sich für den entsprechenden Sachverhalt bei unendlichen Reihen zuerst bei E. Kogbetliantz, Sur la sommabilité absolue des séries par les moyennes arithmétiques, Comptes rendus **178** (1924), p. 295—298.

der unendlichen Reihe $s_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(s_n - s_{n-1})$), und wählt man dann, ebenfalls „treppenartig“,

$$\varphi(x, y) = \varphi_\nu(y) \quad \text{für} \quad \nu \leqq x < \nu + 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so wird

$$g(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \varphi_\nu(y).$$

Wir erhalten so in nur unwesentlicher Modifikation die von O. Perron[2]) für Zahlenfolgen bzw. unendliche Reihen angegebene Klasse von Verfahren.

2. Wählt man bei **1.**, nochmals treppenartig,

$$\varphi_\nu(y) = a_{n\nu} \quad \text{für} \quad n \leqq y < n + 1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so geht $g(y)$ in die Zahlenfolge

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

über, und wir haben die von O. Toeplitz[2]) angegebene Klasse von Limitierungsverfahren (linearen Mittelbildungen) vor uns, jedoch ohne die Beschränkung auf zeilenfinite Matrizen $(a_{n\nu})$. [7])

3. Sind $\mathfrak{C}_x$ und $\mathfrak{C}_y$ wieder die positiv-reellen Achsen ihrer Ebenen und ist $\varphi(x, y) = 0$, sobald $x > y$ ist, so wird

$$g(y) = \int_0^y \varphi(x, y) f(x)\, dx,$$

und wir erhalten die von L. L. Silverman[2]) angegebene Klasse allgemeiner Limitierungsverfahren für Funktionen $f(x)$ bei $x \to +\infty$.

4. Da in diesen drei Klassen, wie in den zitierten Arbeiten im einzelnen ausgeführt ist, alle bekannten Verfahren spezieller Art enthalten sind, so sind diese sämtlich Spezialfälle unseres allgemeinen V-Verfahrens. Andererseits erhalten alle diese speziellen Verfahren (insbesondere soweit sie sich nur auf die Untersuchung von Zahlenfolgen beziehen) ihre naturgemäße Verallgemeinerung für die Grundform (3) aller Grenzprozesse. Dies soll hernach noch an einigen Beispielen ausgeführt werden (s. § 3).

Darüber hinaus aber wird durch unsern allgemeinen Ansatz die Möglichkeit gegeben, nicht nur (wie bisher fast ausschließlich behandelt) Folgen wieder in Folgen oder in Funktionen zu transformieren, oder, wie am Schluß von § 1 kurz angedeutet, Funktionen in Funktionen überzuführen,

[7]) Ohne diese Einschränkung sind die Toeplitzschen linearen Mittelbildungen zuerst von I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **151** (1921), S. 79–111, allgemeiner untersucht worden.

sondern ebenso *Funktionen in Folgen zu transformieren.* Durch diese, bisher wohl noch nicht näher verfolgte Bemerkung erhält unsere Theorie Zusammenhang mit der der Entwicklung von Funktionen in Reihen. Wählt man nämlich die $\varphi(x, y)$ nicht (wie in **1.**) bezüglich x, sondern bezüglich y treppenartig, setzt man also

$$\varphi(x, y) = \varphi_n(x) \quad \text{für} \quad n \leqq y < n+1, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so wird $g(y)$ gleichbedeutend mit der Folge

$$t_n = {}^{(\mathfrak{C}_x)}\int_{x_0}^{\xi} \varphi_n(x) f(x)\, dt,$$

und der Zusammenhang mit der Entwicklung von $f(x)$ in Reihen (als deren Teilsummen die t_n anzusehen sind) ist offenbar [8]). Vgl. hierzu § 3, 12.

Nach dem Vorgange von O. Toeplitz [2]) hat man bei Theoremen von der Form des Satzes 1 in § 1 stets gefragt, ob die aufgestellten hinreichenden Bedingungen auch notwendig für die Gültigkeit des Satzes sind. Solange es sich um die Limitierung von Zahlenfolgen (bzw. Treppenfunktionen der Form (1)) handelt, macht dies keinerlei Schwierigkeiten; man kann nach dem oft durchgeführten Muster ähnlicher Sätze zeigen, daß die Bedingungen a), b), c) des Satzes 1 dann auch notwendig sind. Bei beliebigen Funktionen $f(x)$ läßt sich der Beweis ohne wesentliche Einschränkungen über den Transformationskern $\varphi(x, y)$ nicht erbringen. Diese Einschränkungen beziehen sich je nach Anlage des Beweises (vgl. insbesondere Silverman [2]) und Kojima [2])) auf Beschränktheit, Stetigkeit oder gleichmäßige Stetigkeit von $\varphi(x, y)$ oder auf die Verteilung der Nullstellen dieser Funktion und anderes. Die meisten Einschränkungen dieser Art sind schon bei den einfachsten Transformationen nicht erfüllt. So ist z. B. bei dem Analogon zu den zweiten Hölderschen Mitteln beliebiger Funktionen $f(x)$ als Transformationskern

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{y} \log \frac{y}{x}$$

zu nehmen ($\mathfrak{C}_x = \mathfrak{C}_y =$ positiv-reelle Achse), was in $y > 0$, $0 < x \leqq y$ nicht beschränkt und für $x = 0$ oder $y = 0$ nicht definiert ist. Die einzige Einschränkung, die, wenigstens in der engeren Theorie der divergenten Reihen, nie hindert, ist die, daß $\varphi(x, y)$ nie negativ ist. Da in diesem Falle die Bedingung c) des Satzes 1 eine unmittelbare Folge aus der Bedingung a) ist, so beweist man nach den üblichen Methoden sehr leicht den folgenden einfacheren

[8]) Von dieser Seite her sind die von uns betrachteten Integraloperationen besonders von H. Lebesgue (Sur les integrales singulières, Ann. de Toulouse [3] **1** (1910), S. 25—117) und H. Hahn (Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, Denkschr. d. Wiener Akad. **93** (1916), S. 585—692) untersucht worden.

Satz 2. *Ein V-Verfahren, bei dem stets* $\varphi(x, y) \geqq 0$ *ist, ist dann und nur dann regulär, wenn es die Bedingungen* a) *und* b) *des Satzes* 1 *erfüllt.*

Ein solches Verfahren wollen wir kurz ein *echtes Limitierungsverfahren*, die bei ihm vorgenommene Transformation eine *echte Transformation* nennen. Erst diese Transformationen sind es, bei denen $g(y)$ im eigentlichen Sinne, also eine *echte Mittelbildung* aus den Werten von $f(x)$ darstellt. Die weitaus meisten Limitierungsverfahren, die in der Theorie der divergenten Reihen jemals aufgestellt worden sind, sind solche echten Limitierungsverfahren. Wir werden auch im folgenden nur solchen echten Verfahren begegnen.

§ 3.

Die einzelnen Limitierungsverfahren.

Wir wollen nun, wie schon in § 2 angedeutet, zu einigen der bekanntesten Limitierungsverfahren die auf den allgemeineren Grenzprozeß (3) sich beziehende Verallgemeinerung angeben und einige Bemerkungen daran anknüpfen.

1. Der in der Einleitung angeführten Bildung arithmetischer Mittel, also dem als C_1- oder H_1- oder M-Limitierung von Zahlenfolgen bezeichneten Verfahren, entspricht hier der Fall, daß $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$ die positiv reelle Achse, etwa von $+1$ nach $+\infty$, sind und daß

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{für} \quad 1 \leqq x \leqq y, \\ 0 & \text{„} \quad x > y \end{cases}$$

gesetzt wird. Dann ist

$$g(y) = \frac{1}{y} \int_1^y f(x)\, dx$$

für $y \to +\infty$ an Stelle von $f(x)$ für $x \to +\infty$ zu untersuchen.

Sind $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$ die positiv reellen Strecken von 1 nach 0, so wäre statt $f(x)$ für $x \to +0$ die Funktion

$$g(y) = y \int_y^1 f(x) \frac{dx}{x^2} \quad \text{für} \quad y \to +0$$

zu untersuchen, was dem Transformationskern

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} & \text{für} \quad x \geqq y\,(>0), \\ 0 & \text{„} \quad 0 < x < y \end{cases}$$

entspricht. Beide Limitierungen, die ja nicht wesentlich voneinander verschieden sind, erfüllen die Bedingungen des Satzes 2.

2. In dem zweiten Falle, in dem also $\mathfrak{C}_x$ und $\mathfrak{C}_y$ die positiv reellen Strecken von $+1$ nach $+0$ sind, findet man auch oft den Ansatz

$$g(y) = \frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,dx \quad \text{für} \quad y \to +0,$$

was der Wahl

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{für} \quad 0 < x \leqq y, \\ 0 & \text{„} \quad x > y \end{cases}$$

entspricht. Und wesentlich dasselbe ist es, wenn man statt $f(x)$ für $x \to +\infty$

$$g(y) = y\int_y^\infty f(x)\frac{dx}{x^2} \quad \text{für} \quad y \to +\infty$$

untersucht, was die Wahl

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < y, \\ \frac{y}{x^2} & \text{„} \quad x \geqq y \end{cases}$$

erfordert. Auch diese Limitierungen erfüllen die Bedingungen des Satzes 2.

3. Die in **1.** und **2.** beschriebenen Verfahren, die mit gleichem Recht als C_1- oder M-Limitierungen bezeichnet werden können, sind sachlich etwas verschieden; das zweite insofern etwas enger, als es die Existenz der uneigentlichen Integrale $\int_0^y f(x)\,dx$ bzw. $\int_y^\infty f(x)\frac{dx}{x^2}$ voraussetzen muß. Hiervon abgesehen behaupte ich, daß *beide Verfahren äquivalent sind.*

a) Voraussetzung. $\frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,dx = g_2(y) \to a$ für $y \to +0$.

Behauptung. $y\int_y^1 f(x)\frac{dx}{x^2} = g_1(y) \to a$ für $y \to +0$.

In der Tat liefert die hier erlaubte partielle Integration

$$g_1(y) = y\left\{\int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{y^2}\int_0^y f(t)\,dt\right\} + 2y\int_y^1 \frac{g_2(x)}{x^2}\,dx.$$

Nach Voraussetzung und weil das in **1.** beschriebene Verfahren regulär ist, strebt dies $\to -a + 2a = a$.

b) Voraussetzung. $g_1(y) \to a$ für $y \to +0$.

Behauptung. $g_2(y) \to a$ für $y \to +0$, falls das Integral $\int_0^y f(x)\,dx$ für $y > 0$ existiert.

Jetzt ist nämlich $g_2(y)$ der Grenzwert für $\varepsilon \to +0$ von

$$\frac{1}{y}\int_\varepsilon^y \frac{f(x)}{x^2}\,x^2\,dx = \frac{1}{y}\left\{\left[-\left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right)x^2\right]_\varepsilon^y + 2\int_\varepsilon^y x\left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\,dt\right)dx\right\}.$$

Es ist also

$$g_2(y) = -\,y\int_y^1 \frac{f(x)}{x^2}\,dx + \frac{2}{y}\int_0^y g_1(x)\,dx.$$

Nach der jetzigen Voraussetzung und weil auch das in **2.** beschriebene Verfahren regulär ist, strebt dies $\to -a + 2a = a$.

Auf Grund dieses Äquivalenzsatzes können wir die in **1.** und **2.** definierten Verfahren unterschiedslos als C_1-Verfahren bezeichnen.

4. Es ist

$$C_1\text{-}\lim_{x\to+\infty} \sin x = 0,$$

denn nach **1.** hat man

$$g(y) = \frac{1}{y}\int_0^y \sin x\,dx = \frac{1-\cos y}{y} \quad \text{für} \quad y \to +\infty$$

zu untersuchen.

5. Es ist $C_1\text{-}\lim \sin\frac{1}{x} = 0$ für $x \to \pm 0$; oder: Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in} \quad x = 0, \\ \sin\dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x \gtrless 0 \end{cases}$$

ist in 0 noch beiderseits C_1-stetig.

6. Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in} \quad x = 0, \\ x\sin\dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x \gtrless 0 \end{cases}$$

ist in 0 noch nach beiden Seiten C_1-differenzierbar mit 0 als Wert der C_1-Derivierten.

7. Als spezielle Anwendung beweisen wir den Satz, der dem Cesàroschen Satz über die C_1-Summierbarkeit des Cauchyschen Produktes zweier konvergenter Reihen entspricht:

Satz. *Sind* $h_1(x)$ *und* $h_2(x)$ *über jedes Intervall* $(0, x_0)$ *mit* $0 < x_0 < +\infty$ *eigentlich integrierbar und existieren die uneigentlichen Integrale*

$$\int_0^{+\infty} h_1(x)\,dx = J_1 \quad \text{und} \quad \int_0^{+\infty} h_2(x)\,dx = J_2,$$

so ist, wenn für $x \geqq 0$

$$\int_0^x h_1(t)\,h_2(x-t)\,dt = h_3(x)$$

gesetzt wird,

$$C_1\text{-}\lim \int_0^x h_3(x)\,dx = J_1 J_2.$$

Setzt man nämlich für $\nu = 1, 2, 3$ und $x \geqq 0$

$$\int_0^x h_\nu(t)\,dt = H_\nu(x),$$

so ist

$$H_3(x) = \int_0^x \left(\int_0^t h_1(\tau) \cdot h_2(t-\tau)\,d\tau \right) dt = \int_0^x \left(h_1(\tau) \cdot \int_\tau^x h_2(\sigma-\tau)\,d\sigma \right) d\tau$$

$$= \int_0^x h_1(\tau) \cdot H_2(x-\tau)\,d\tau.$$

Daher ist

$$\frac{1}{y}\int_0^y H_3(x)\,dx = \frac{1}{y}\int_0^y \left(\int_0^x H_2(\tau) \cdot h_1(x-\tau)\,d\tau \right) dx = \frac{1}{y}\int_0^y H_1(y-\tau) \cdot H_2(\tau)\,d\tau,$$

was für $y \to +\infty$ offensichtlich $\to J_1 J_2$ strebt.

8. Das C_k-Verfahren zur Limitierung von Zahlenfolgen (s_n) besteht darin, daß man die k-mal iterierten Summen $S_n^{(k)}$ bildet (die man, auch für beliebiges reelles $k > -1$, formal durch

$$\sum_n S_n^{(k)} x^n = \frac{1}{(1-x)^k} \sum_n s_n x^n$$

definieren kann) und sie durch den entsprechenden Ausdruck für die Folge $1, 1, 1, \ldots$, d. h. durch $\binom{n+k}{n}$ dividiert. Liegt nun statt s_n die Funktion $f(x)$ für $x \to +\infty$ zu untersuchen vor, so wird man analog k-mal integrieren und durch den entsprechenden Ausdruck für die Funktion 1 dividieren. Dies liefert bei beliebigem reellen $k > 0$

$$g(y) = \frac{k!}{y^k}\left(\int_0^y\right)^k f(x)\,dx = \frac{k}{y^k}\int_0^y (y-x)^{k-1} f(x)\,dx.$$

Das auf der Untersuchung dieser Funktion $g(y)$ für $y \to +\infty$ beruhende Limitierungsverfahren, bei dem also $\mathfrak{C}_x$ und $\mathfrak{C}_y$ wieder als die positiv-reellen Achsen zu wählen sind und

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{y^k}(y-x)^{k-1} & \text{für } 0 \leqq x < y, \\ 0 & \text{„ } x \geqq y \end{cases}$$

zu setzen ist, kann hiernach als C_k-Verfahren angesprochen werden[9]).

9. Das Abelsche oder A-Verfahren, das bei Zahlenfolgen (s_n) den Grenzwert von $(1-z)\sum_n s_n z^n$ für positive, wachsende $z \to +1$ an Stelle von $\lim s_n$ setzt, hat in unserer allgemeineren Fassung das folgende Analogon: Man wähle etwa für $\mathfrak{C}_x$ die Halbgerade $+1 \ldots +\infty$, für $\mathfrak{C}_y$ die Strecke von $+1$ nach 0 und setze

$$\varphi(x, y) = y e^{-xy},$$

so daß an Stelle von $f(x)$ für $x \to +\infty$ der Grenzwert von

$$g(y) = y \int_1^\infty e^{-xy} f(x)\, dx \quad \text{für} \quad y \to +0$$

zu untersuchen ist. Dieses verallgemeinerte A-Verfahren, das offenbar wieder die Bedingungen des Satzes 2 erfüllt, lehnt sich also unmittelbar an die sogenannte Laplace-Transformation an, die neuerdings nach vielen Richtungen hin untersucht worden ist[10]).

Hiernach ist z. B. wieder $A\text{-}\lim \sin x = 0$ für $x \to +\infty$, denn es ist dann

$$g(y) = y \int_1^{+\infty} e^{-xy} \sin x\, dx = + \frac{y e^{-y}}{1+y^2}(\cos 1 + y \sin 1),$$

was für $y \to 0$ selbst gegen 0 strebt. Allgemeiner gilt der

Satz. *Aus* $C_k\text{-}\lim f(x) = a$ *für* $x \to +\infty$ $(k > 0$ *ganz*$)$ *folgt* $A\text{-}\lim f(x) = a$ *für* $x \to +\infty$.

---

[9]) Es ist nicht das genaue Analogon zum C_k-Verfahren bei Zahlenfolgen (s_n), bei dem ja $\lim \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{n}}$ an Stelle von $\lim s_n$ tritt. Doch hat M. Riesz schon 1911 gezeigt, daß, wenn $f(x)$ die der Folge (s_n) entsprechende Treppenfunktion (1) ist, $\lim g(y)$ für $y \to +\infty$ und $\lim \binom{n+k}{n}^{-1} S_n^{(k)}$ für $n \to +\infty$ stets gleichzeitig existieren (und dann einander gleich sind) oder nicht existieren.

[10]) Vgl. etwa G. Doetsch, Überblick über Gegenstand und Methode der Funktionalanalysis, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. **36** (1927), S. 1—30.

Beweis. Nach Voraussetzung strebt (s. 8.)

$$g_1(y) = \frac{k!}{y^k}\left(\int_0^y f(x)\right)^k dx$$

gegen a für $y \to +\infty$. Bezeichnet man nun die durch iterierte Integration von 0 bis x aus $f(x)$ entstehenden Funktionen mit $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., so erhält man durch k-malige partielle Integration, daß für $y \to +0$

$$\lim y \int_1^\infty e^{-xy} f(x)\, dx = \lim \frac{y^{k+1}}{k!} \int_1^\infty \frac{k!}{x^k} F_k(x) \cdot x^k e^{-xy}\, dx$$

ist. Da nun das V-Verfahren mit

$$\varphi(x, y) = \frac{y^{k+1}}{k!} \cdot x^k e^{-xy} \qquad \begin{cases} 1 \leqq x < +\infty \\ 0 < y \leqq +1 \end{cases}$$

offenbar den Bedingungen des Satzes 2 genügt (denn es strebt

$$\Phi(y) = \frac{y^{k+1}}{k!} \int_1^{+\infty} x^k e^{-xy}\, dx = \frac{1}{k!} \int_y^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt \to \frac{\Gamma(k+1)}{k!} = 1$$

für $y \to +0$), so ist dieser Grenzwert gleich demjenigen von

$$\frac{k!}{x^k} F_k(x) \quad \text{für} \quad x \to +\infty,$$

also nach Voraussetzung auch $= a$.

10. Dem Borelschen oder B-Verfahren, das $\lim s_n$ durch den Grenzwert von

$$g(y) = e^{-y} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{y^n}{n!} \quad \text{für} \quad y \to +\infty$$

ersetzt, und dem Eulerschen oder E-Verfahren, das ihn durch denjenigen der Folge

$$t_n = \frac{1}{2^n}\left[\binom{n}{0} s_0 + \binom{n}{1} s_1 + \ldots + \binom{n}{n} s_n\right] \quad \text{für} \quad n \to +\infty$$

ersetzt, entsprechen nicht unmittelbar brauchbare Analoga bei unserem V-Verfahren; denn es müßte z. B.

die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{y^n}{n!}$ in das Integral $\int_0^\infty \frac{y^x}{\Gamma(x+1)} f(x)\, dx$

verwandelt werden, das wegen des Auftretens der Γ-Funktion unbequem ist. Beachtet man aber die Tatsache, daß der sozusagen allein wirksame Teil der Summe $\sum s_n \frac{y^n}{n!}$ aus denjenigen Gliedern besteht, deren Nummern

sich von y höchstens um Beträge der Größenordnung $\sqrt{y}$ unterscheiden, so wird man durch bekannte Überlegungen dazu geführt, die Transformation

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2y}} f(x)\, dx$$

als ein Analogon zur B-Transformation der Zahlenfolgen anzusehen. In der Tat haben G. H. Hardy und J. E. Littlewood[11]) bei ihren tiefliegenden Untersuchungen über die Umkehrsätze des B-Verfahrens gerade diese Transformation betrachtet für den Fall, daß $f(x)$ den durch (1′) definierten Polygonzug bedeutet, und haben bewiesen, daß aus $B\text{-}\lim s_n = a$ stets auch $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = a$ folgt, wofern nur $(s_n - s_{n-1}) \to 0$ strebt.

11. Die Rieszschen (λ, k)-Verfahren (oder die Verfahren der „moyennes typiques") für Zahlenfolgen (s_n) wählen eine Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ von positiven, monoton gegen $+\infty$ wachsenden Zahlen, setzen

$$s(x) = s_n \quad \text{für} \quad \lambda_n < x \leqq \lambda_{n+1}$$

bzw.

$$S(x) = s_n \quad \text{für} \quad e^{\lambda_n} < x \leqq e^{\lambda_{n+1}}$$

und untersuchen für beliebiges $k > 0$

$$g(y) = \frac{k}{y^k} \int_0^y (y-x)^{k-1} s(x)\, dx \quad \text{bzw.} \quad G(y) = \frac{k}{y^k} \int_0^y (y-x)^{k-1} S(x)\, dx$$

für $y \to +\infty$ an Stelle von (s_n) für $n \to +\infty$.[12]) (Verfahren erster bzw. zweiter Art).

Die Verfahren sind also von sehr ähnlicher Art wie das C_k-Verfahren. Der Unterschied ist nur der, daß (s_n) nicht durch die Treppenfunktion (1), sondern durch eine solche ersetzt wird, bei der die Stufen der Treppe an den Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ bzw. $e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \ldots$ (statt bei $1, 2, \ldots$) liegen.

Unser allgemeines V-Verfahren werden wir daher als Rieszsches (λ, k)-Verfahren ansprechen können, wenn wir für $\mathfrak{C}_x$ und $\mathfrak{C}_y$ die positiv-reelle Achse wählen und an Stelle von $f(x)$ für $x \to +\infty$ die Funktion

$$g(y) = \frac{k}{y^k} \int_0^y (y-x)^{k-1} f(\Lambda(x))\, dx$$

---

[11]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Theorems concerning the summability of series by Borel's exponential method, Rend. Circ. Mat. Palermo **41** (1916), p. 36–53.

[12]) Eine ausführliche Darstellung dieses Verfahrens findet man in Hardy-Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915.

für $y \to +\infty$ betrachten. Dabei soll $\lambda(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte stetige positive und (im engeren Sinne) monoton gegen $+\infty$ wachsende Funktion und $\Lambda(x)$ die dazu inverse Funktion sein[13]). Nehmen wir noch an, was praktisch keine Einschränkung bedeutet, daß $\lambda(0) = 0$ ist und daß $\lambda'(x)$ existiert und integrierbar ist, so ist

$$g(y) = \frac{k}{y^k} \int_0^{\Lambda(y)} (y - \lambda(x))^{k-1} \cdot \lambda'(x) \cdot f(x)\, dx .$$

Das Verfahren ergibt sich also aus unserm allgemeinen Ansatz, wenn wir nach der schon genannten Wahl von $\mathfrak{C}_x$ und $\mathfrak{C}_y$

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{k}{y^k} (y - \lambda(x))^{k-1} \cdot \lambda'(x) & \text{für} \quad 0 \leqq x < \Lambda(y) \\ 0 & \text{„} \quad x \geqq \Lambda(y) \end{cases}$$

setzen.

12. Endlich sei noch ein Beispiel für eine echte Transformation einer Funktion in eine Folge (s. § 2, 4.) erwähnt: Ist $F(x)$ eine reelle, integrierbare Funktion der *reellen* Veränderlichen x und mit 2π periodisch, so betrachten wir bei festem x_0 die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}[F(x_0 + 2x) + F(x_0 - 2x)]$$

auf der als Integrationsweg $\mathfrak{C}_x$ zu nehmenden Strecke von $\frac{\pi}{2}$ nach 0. Es sei $\mathfrak{C}_y$ die positiv-reelle Achse und

$$\varphi(x, y) = \frac{2}{n\pi} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 \quad \text{für} \quad n \leqq y < n+1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dann ist $g(y)$ gleichbedeutend mit der Zahlenfolge

$$t_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx .$$

Da nun $\varphi(x, y) \geqq 0$, $\frac{2}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx = 1$ ist $(n = 1, 2, \ldots)$, und da für festes x_1 in $0 < x_1 < \frac{\pi}{2}$ offenbar

[13]) Das Verfahren kommt also etwa darauf hinaus, daß $f(x)$ vor der Transformation in $g(y)$ einer Streckung unterworfen wird. Das Verfahren erster Art unterscheidet sich von demjenigen zweiter Art nur durch die Stärke dieser Streckung und braucht also bei prinzipiellen Betrachtungen nicht gesondert aufgeführt zu werden.

$$\frac{2}{n\pi}\int_{x_1}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx \to 0$$

strebt für $n \to \infty$, so handelt es sich um eine echte Transformation, und aus $f(x) \to s$ für positive, abnehmende $x \to 0$ folgt $t_n \to s$. Diese t_n sind aber die arithmetischen Mittel der Teilsummen der Fourierreihe von $F(x)$ an der Stelle x_0. Wir haben hierin also einen Beweis — oder besser eine Subsumierung des üblichen Beweises unter unser allgemeines Schema — für den bekannten Fejérschen Satz[14]) über die C_1-Summierbarkeit der Fourierreihe einer Funktion $F(x)$ zum Werte s an jeder Stelle x_0, an der $\lim_{x \to 0} \frac{1}{2}[F(x_0 + 2x) + F(x_0 - 2x)]$ existiert und gleich s ist. Vgl. hierzu noch § 5, 12.

II. Teil.

§ 4.

Der Kernsatz über echte Limitierungsverfahren.

Es soll nun ein Satz bewiesen und durch eine Reihe spezieller Anwendungen ausgebeutet werden, durch den ein gewisser Einblick in die Wirkungsart jedes einzelnen Limitierungsverfahrens und ein gewisser Vergleich der Wirkungskräfte zweier verschiedener dieser Verfahren ermöglicht wird.

1. Dazu betrachte ich — bei der allgemeinen, dem Satz 1 zugrunde liegenden Situation — in einer komplexen Zahlenebene die Menge aller Punkte $f(x)$, die man erhält, wenn x von einer speziellen, auf $\mathfrak{C}_x$ gelegenen Stelle x_1 an gegen ξ läuft[15]), und es sei $\mathfrak{K}(x_1)$ der kleinste konvexe Bereich, der diese Punktmenge enthält[16]). Dann ist für $x_2 \succ x_1$ immer

$$\mathfrak{K}(x_2) \leqq \mathfrak{K}(x_1),$$

---

[14]) L. Fejér, Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Annalen **58** (1904), S. 51—59.

[15]) Hierfür wollen wir kurz sagen: die Menge aller $f(x)$ mit $x \succ x_1$ auf $\mathfrak{C}_x$.

[16]) Alle im folgenden auftretenden konvexen Bereiche sind abgeschlossen zu denken. — Da wir uns hier in der durch den Punkt ∞ abgeschlossenen komplexen Zahlenebene bewegen, ist der kleinste konvexe Bereich $\mathfrak{K}$, der eine Punktmenge $\mathfrak{M}$ (in der der Punkt ∞ nicht selbst als Element auftritt) enthält, folgendermaßen zu definieren: Gibt es keine Halbebene, die $\mathfrak{M}$ enthält, so ist $\mathfrak{K}$ die ganze Ebene einschließlich ∞. Andernfalls ist $\mathfrak{K}$ der Durchschnitt aller abgeschlossenen Halbebenen, die $\mathfrak{M}$ enthalten; doch ist hierbei im Falle einer beschränkten Menge $\mathfrak{M}$ der isoliert im Durchschnitt auftretende Punkt ∞ wegzulassen. Oder: $\mathfrak{K}$ besteht aus allen denjenigen Punkten der eigentlichen Ebene, durch die sich keine Schranke für $\mathfrak{M}$ legen läßt, und aus deren Häufungspunkten. Dabei soll als „Schranke für $\mathfrak{M}$" jede Gerade bezeichnet werden, die alle Punkte von $\mathfrak{M}$ auf einer Seite läßt und keinen Punkt von $\mathfrak{M}$ enthält.

d. h. $\mathfrak{K}(x_2)$ eine Teilmenge von $\mathfrak{K}(x_1)$. Endlich sei $\mathfrak{K}$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{K}(x)$ mit x auf $\mathfrak{C}_x$. Dieser Durchschnitt ist nie leer, wenn wir uns die komplexe Ebene durch den unendlich fernen Punkt abgeschlossen denken.

Diesen Bereich $\mathfrak{K}$ bezeichnen wir als den Kern des Grenzprozesses „$f(x)$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$“.

[Ist $\mathfrak{M}$ irgendeine Punktmenge mit einem Häufungspunkt in ξ und ist $f(x)$ auf $\mathfrak{M}$ definiert, so kann man analog den Kern $\mathfrak{K}$ von „$f(x)$ für $x \to \xi$ auf $\mathfrak{M}$“ folgendermaßen definieren: Man betrachte für alle hinreichend kleinen positiven ϱ die in $|x-\xi| < \varrho$ $\left(\text{bzw. in } \left|\frac{1}{x}\right| < \varrho, \text{ falls } \xi = \infty \text{ ist}\right)$ gelegene Teilmenge von $\mathfrak{M}$. Es sei $\mathfrak{K}(\varrho)$ der kleinste konvexe Bereich, der alle Werte $f(x)$ enthält, für die x dieser Teilmenge angehört. Dann ist $\mathfrak{K}$ der Durchschnitt aller $\mathfrak{K}(\varrho)$ mit hinreichend kleinem $\varrho > 0$. Doch werden wir diese Erweiterung im folgenden nicht gebrauchen.]

Der Grenzprozeß „$f(x)$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$“ ist offenbar dann und nur dann konvergent, wenn der zugehörige Kern aus genau einem (im Endlichen gelegenen) Punkt besteht. Ist a dieser Punkt, so ist $\lim f(x) = a$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$.

Besteht der Kern desselben Grenzprozesses genau aus dem einen Punkt ∞, so wollen wir sagen, $f(x)$ *divergiere bestimmt* gegen ∞ (für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$).[17]) Wenn $\mathfrak{K}$ dagegen aus mehr als einem Punkte besteht, so nennen wir $f(x)$ *unbestimmt divergent* für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$. Dieser Fall allein ist es, der eine Theorie divergenter Prozesse erfordert, während die bestimmte Divergenz ihrem Charakter nach recht eigentlich noch eine Konvergenz ist.

---

[17]) Im Falle *reeller* Funktionen $f(x)$ bzw. Zahlenfolgen pflegt man es als bestimmte Divergenz zu bezeichnen, wenn nach Wahl von $G > 0$ sich $x_1 = x_1(G)$ auf $\mathfrak{C}_x$ so bestimmen läßt, daß für alle $x \gtrless x_1$ entweder stets $f(x) > G$ oder stets $< -G$ ist. Man sagt dann, es strebe $f(x) \to +\infty$ bzw. $-\infty$. Eine stets brauchbare Erweiterung dieses Begriffes der bestimmten Divergenz auf den Fall *komplexer* Funktionen bzw. Zahlenfolgen ist meines Wissens bisher nicht gegeben worden. Denn den Fall, daß $|f(x)| \to +\infty$ strebt, als bestimmte Divergenz zu bezeichnen geht nicht an, da dann z. B. die Folge $s_n = (-1)^n n$ als unbestimmt oder bestimmt divergent bezeichnet werden müßte, je nachdem man sie als reelle oder als komplexe Zahlenfolge ansieht. Bei unserer Definition ist eine solche Kollision ausgeschlossen. Denn ist $f(x)$ eine reelle für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ im alten Sinne bestimmt divergierende Funktion, so besteht der Kern dieses Grenzprozesses offenbar nur aus dem Punkt ∞; $f(x)$ ist also auch als komplexe Funktion gemäß unserer neuen Definition bestimmt divergent. Ist dagegen $f(x)$ im alten Sinne unbestimmt divergent (d. h. weder konvergent noch bestimmt divergent), so ist $\underline{\lim} f(x) < \overline{\lim} f(x)$, und der Kern, der offenbar aus der Verbindungsstrecke beider Werte besteht, enthält mehr als einen Punkt, so daß $f(x)$ auch als komplexe Funktion gemäß unserer neuen Definition unbestimmt divergiert.

Ist $f(x)$ die zu einer Zahlenfolge (s_n) gehörige Treppenfunktion (1) oder der Polygonzug (1'), so nennen wir den Kern von $f(x)$ für $x \to +\infty$ längs der positiv-reellen Achse — er ist für die beiden Definitionen (1) und (1') von $f(x)$ offenbar derselbe — kurz *den Kern der Folge* (s_n). Dieser Kern einer Folge s_n kann natürlich auch dadurch erhalten werden, daß man den Durchschnitt aller Bereiche $\mathfrak{K}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ nimmt, die als die kleinsten konvexen, die Restfolge $(s_n, s_{n+1}, \ldots)$ enthaltenden Bereiche definiert sind.

Ist die Folge (s_n) beschränkt, so ist dieser ihr Kern, wie man leicht zeigt, identisch mit dem kleinsten konvexen Bereich, der alle Häufungspunkte von s_n enthält.

2. Wird nun durch eines der in § 1 beschriebenen V-Verfahren $f(x)$ in $g(y)$ transformiert, so definieren sich in genau analoger Weise für jedes y auf $\mathfrak{C}_y$ die Bereiche $\mathfrak{K}'(y)$ und als deren Durchschnitt *der Kern* $\mathfrak{K}'$ *von* $g(y)$ *für* $y \to \eta$ *längs* $\mathfrak{C}_y$. Diesen Kern wollen wir auch, in genauer Analogie zu den andern Bezeichnungen, als den *V-Kern von* $f(x)$ *für* $x \to \xi$ *längs* $\mathfrak{C}_x$ bezeichnen. — Über die Beziehung von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gilt nun der folgende

Kernsatz. *Für jedes echte Limitierungsverfahren V ist*

$$\mathfrak{K}' \leqq \mathfrak{K},$$

d. h. $\mathfrak{K}'$ *eine Teilmenge von* $\mathfrak{K}$.

Dem Beweis dieses Kernsatzes schicken wir die folgenden beiden Hilfssätze voraus:

Hilfssatz 1. Es sei $f(x)$ eine beliebige und $\lambda(x)$ eine reelle, nicht negative Funktion, die beide auf $\mathfrak{C}_x$ definiert sind; es seien die Integrale

$$\overset{(\mathfrak{C}_x)}{\int_{x_0}^{\xi}} \lambda(x)\,dt = \lambda \quad \text{und} \quad \overset{(\mathfrak{C}_x)}{\int_{x_0}^{\xi}} \lambda(x) f(x)\,dt = c$$

vorhanden und es sei $\lambda > 0$. Liegen dann die Werte von $f(x)$ sämtlich in der abgeschlossenen Halbebene $\mathfrak{H}$, so liegt der Punkt c in der Halbebene $\lambda\mathfrak{H}$.[18])

Beweis. Ist $\mathfrak{H}$ die Halbebene $\Re(z) \geqq \alpha$, so ist

$$\Re(c) = \overset{(\mathfrak{C}_x)}{\int_{x_0}^{\xi}} \lambda(x)\,\Re(f(x))\,dt \geqq \alpha \cdot \overset{(\mathfrak{C}_x)}{\int_{x_0}^{\xi}} \lambda(x)\,dt = \lambda\alpha,$$

d. h. c liegt in $\lambda\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{H}$ beliebig, so ist für geeignete reelle β und α' die Halbebene $e^{i\beta}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'$ mit der Halbebene $\Re(z) \geqq \alpha'$ identisch. In ihr

[18]) Ist $\mathfrak{M}$ irgendeine Punktmenge und $a \neq 0$, so soll $a\mathfrak{M}$ das Bild von $\mathfrak{M}$ bei der Abbildung durch die Drehstreckung $w = az$ bedeuten.

liegen die Werte $e^{i\beta} f(x)$, und folglich liegt nach dem eben bewiesenen Spezialfall der Punkt

$$c' = \overset{(\mathfrak{C}_x)}{\int_{x_0}^{\xi}} \lambda(x) \cdot e^{i\beta} f(x)\, dt = e^{i\beta} c$$

in $\lambda \mathfrak{H}'$. Dann liegt aber $c = e^{-i\beta} c'$ in der Halbebene $e^{-i\beta} \lambda \mathfrak{H}' = \lambda \mathfrak{H}$.

Hilfssatz 2. Haben $f(x)$ und $\lambda(x)$, λ und c dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 1 und ist $\mathfrak{K}_0$ der kleinste konvexe Bereich, der alle Werte $f(x)$ enthält (vgl. [16]), so liegt c im Bereiche $\lambda \mathfrak{K}_0$.

Beweis. Wenn $\mathfrak{K}_0$ die ganze Ebene ist, so ist nichts zu beweisen. Ist das nicht der Fall, so gibt es Halbebenen $\mathfrak{H}$, die alle Werte $f(x)$ enthalten, und $\mathfrak{K}_0$ ist der Durchschnitt aller solcher Halbebenen, wenn von dem möglicherweise isoliert auftretenden Punkt ∞ abgesehen wird. Nach Hilfssatz 1 liegt dann c in allen Halbebenen $\lambda \mathfrak{H}$ und also, da nach Voraussetzung $c \neq \infty$ ist, in $\lambda \mathfrak{K}_0$.

Beweis des Kernsatzes. Ist $\mathfrak{K}$ die ganze Ebene, so ist auch hier nichts zu beweisen. Im andern Falle besagt die Behauptung unseres Satzes offenbar nur, daß ein Punkt z^*, der nicht zu $\mathfrak{K}$ gehört, auch nicht zu $\mathfrak{K}'$ gehören kann.

Liegt nun z^* nicht in $\mathfrak{K}$, so liegt er nicht in allen $\mathfrak{K}(x)$. Es gibt also einen Punkt x_1 auf $\mathfrak{C}_x$, so daß z^* nicht zu $\mathfrak{K}(x_1)$ gehört, also, da $\mathfrak{K}(x_1)$ abgeschlossen ist, außerhalb $\mathfrak{K}(x_1)$ liegt. Und die Behauptung, daß z^* auch nicht zu $\mathfrak{K}'$ gehört, bedeutet analog, daß es auf $\mathfrak{C}_y$ einen Punkt y_1 gibt, für den z^* außerhalb $\mathfrak{K}'(y_1)$ liegt.

a) Es sei nun zunächst $z^* \neq \infty$. Dann gibt es in $\mathfrak{K}(x_1)$ einen (übrigens eindeutig bestimmten) Punkt z_1, dessen Abstand von z^* ein Minimum ist. Dieses ist noch positiv. Die Strecke $z^* \ldots z_1$ teilen wir in vier gleiche Teile — die Länge eines jeden Teiles sei d — und ziehen durch die Teilpunkte je eine Gerade senkrecht zur genannten Strecke. Diese Geraden bezeichnen wir mit h_0 (durch z^*), h_1, h_2, h_3 und h_4 (durch z_1), orientieren h_0 so, daß $\mathfrak{K}(x_1)$ zu ihrer Rechten liegt, und geben den andern Geraden die gleiche Richtung. Ersichtlich ist h_4 noch Stützgerade von $\mathfrak{K}(x_1)$, so daß kein Punkt von $\mathfrak{K}(x_1)$ links von h_4 liegt.

Es genügt nun zu zeigen: Es gibt auf $\mathfrak{C}_y$ einen Punkt y_1, so daß alle Werte $g(y)$ mit $y \succ y_1$ auf $\mathfrak{C}_y$ rechts von h_1 liegen. Denn dann liegt kein Punkt von $\mathfrak{K}'(y_1)$ links von h_1 und also z^* sicher außerhalb $\mathfrak{K}'(y_1)$.

Einen solchen Punkt y_1 bestimmen wir nun so: Nach Hilfssatz 2 liegt für jedes y auf $\mathfrak{C}_y$ der Wert

$$g_1(y) = \overset{(\mathfrak{C}_x)}{\int_{x_1}^{\xi}} \varphi(x, y) f(x)\, dt \quad \text{in} \quad \lambda \cdot \mathfrak{K}(x_1),$$

falls die (sicher nicht negative) Zahl

$$\lambda = \lambda_y = \int_{x_1}^{\xi} \varphi(x, y)\, dt = \Phi(y) - \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)\, dt$$

positiv ist. Da aber λ_y für $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_y$ gemäß den Bedingungen a) und b) des Satzes 2 gegen $+1$ strebt, so läßt sich y auf $\mathfrak{C}_y$ so angeben, daß für alle $y \succ \bar{y}$ auf $\mathfrak{C}_y$ stets $\lambda_y > 0$ ist. Wir können dann weiter $y' \succ \bar{y}$ auf $\mathfrak{C}_y$ so angeben, daß, wenn wir die rechts von h_3 gelegene Halbebene vom Nullpunkt aus der Streckung

$$1 : \lambda_y \quad \text{mit} \quad y \succ y' \quad \text{auf} \quad \mathfrak{C}_y$$

unterwerfen, sie immer noch rechts von h_2 verbleibt.

Die Punkte $g_1(y)$ liegen dann für $y \succ y'$ (auf $\mathfrak{C}_y$) sicher rechts von h_2. Nun ist endlich

$$g(y) = g_1(y) + \varepsilon(y) \quad \text{mit} \quad \varepsilon(y) = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y) f(x)\, dt;$$

und da es eine Konstante K geben soll, für die

$$|f(x)| \leqq K$$

gilt für alle x auf $\mathfrak{C}_x$ mit $x_1 \succ x \succ x_0$, so ist

$$|\varepsilon(y)| \leqq K \cdot \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x, y)\, dt.$$

Wegen Bedingung b) des Satzes 2 können wir also $y_1 \succ y'$ auf $\mathfrak{C}_y$ so wählen, daß für alle $y \succ y_1$ auf $\mathfrak{C}_y$ stets

$$|\varepsilon(y)| < d$$

ist. Für diese y liegt dann aber, da $g_1(y)$ rechts von h_2 lag, der Wert $g(y) = g_1(y) + \varepsilon(y)$ sicher noch rechts von h_1.

b) Ist aber $z^* = \infty$, so bedeutet unsere Voraussetzung, z^* liege außerhalb $\mathfrak{K}(x_1)$, nichts anderes, als daß der Bereich $\mathfrak{K}(x_1)$ beschränkt ist. Er liege etwa im Kreise $|x| \leqq R$. Die Behauptung besagt dann analog, daß für ein passendes y_1 auf $\mathfrak{C}_y$ auch $\mathfrak{K}'(y_1)$ beschränkt ist. Wählen wir aber — unter Beibehaltung der Bezeichnungen aus a) — y_1 so, daß für $y \succ y_1$ auf $\mathfrak{C}_y$

$$0 < \lambda_y < 2 \quad \text{und} \quad |\varepsilon(y)| < 1$$

ist, so ist für diese y, da $g_1(y)$ in $\lambda_y \cdot \mathfrak{K}(x_1)$ liegt,

$$|g(y)| = |g_1(y) + \varepsilon(y)| \leqq 2R + 1.$$

Daher ist auch $\mathfrak{K}'(y_1)$ beschränkt und somit der Kernsatz vollständig bewiesen.

§ 5.

Zusätze, Spezialfälle, Anwendungen.

1. Wie schon hervorgehoben, sind die weitaus meisten Limitierungsverfahren, die in der Theorie der divergenten Reihen jemals aufgestellt worden sind, im Sinne unserer Definition *echte* Limitierungsverfahren. Alle im folgenden erwähnten speziellen Verfahren gehören dazu, wie ein Blick auf ihre Definition zeigt.

Insbesondere sind alle Verfahren des von O. Toeplitz angegebenen Typus (siehe § 2, 2.) echt, falls die $a_{n\nu} \geqq 0$ sind. Hierher gehören das Höldersche, das Cesàrosche und das Eulersche Verfahren jeder Ordnung[19]). Ebenso sind auch alle Verfahren des von O. Perron angegebenen Typus (siehe § 2, 1.) echt, falls stets $\varphi_\nu(y) \geqq 0$ ist. Hierzu gehören außer den genannten noch das Abelsche und das Borelsche Verfahren. Auch die Verfahren der von L. L. Silverman angegebenen Art sind echt, falls nur stets $\varphi(x, y) \geqq 0$ ist. Dies gilt endlich auch von den in § 3, 11. besprochenen Rieszschen Verfahren, sowie für die Verallgemeinerungen aller dieser Verfahren auf die Limitierung des allgemeinen Grenzprozesses „$f(x)$ für $x \to \xi$ längs C_x".

2. Der Kernsatz enthält natürlich einen neuen Beweis des Permanenzsatzes aller dieser Verfahren, des Satzes also, daß die echten Limitierungsverfahren *regulär* sind (vgl. Satz 2). Denn ist $\lim f(x) = a$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$, so besteht der Kern $\mathfrak{K}$ dieses Grenzprozesses (siehe § 4, 1.) aus dem einen Punkt a. Daher besteht auch $\mathfrak{K}'$ genau aus diesem einen Punkt, und folglich ist auch $\lim g(y) = a$ für $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_y$.

3. Der Kernsatz enthält aber weiter eine nicht unwesentliche Ergänzung dieser Permanenzsätze: Besteht der Kern $\mathfrak{K}$ des Grenzprozesses $f(x)$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ genau aus dem einen Punkt ∞ — wir sagten dann, daß $f(x)$ bestimmt divergiere gegen ∞ —, so besteht auch $\mathfrak{K}'$ genau aus diesem einen Punkt ∞, und folglich divergiert auch $g(y)$ bestimmt gegen ∞. Durch ein echtes Limitierungsverfahren kann also ein bestimmt divergenter Grenzprozeß niemals in einen konvergenten oder in einen unbestimmt divergenten verwandelt werden[20]).

[19]) Wegen der Definitionen dieser und der sonst genannten Verfahren vgl. [2]), sowie § 3 und die nachfolgenden Nummern. Eine ausführlichere Darstellung findet man in meinem Buche „Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen", 2. Aufl., Berlin (Julius Springer) 1924, Kap. XIII.

[20]) Für die echten Verfahren des von Toeplitz angegebenen Typus und für reelle, gegen $+\infty$ strebende Zahlenfolgen findet sich dieser Satz schon bei I. Schur, Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Annalen **74** (1913), S. 447–458.

Hierdurch erhält eine ältere Bemerkung von A. Pringsheim[21]) zum Abelschen Grenzwertsatz eine wesentliche Verschärfung und Erklärung. Der Abelsche Grenzwertsatz — d. h. also der Permanenzsatz des Abelschen Limitierungsverfahrens (siehe § 3, 9.) — besagt, daß der Grenzwert von $g(y) = (1-y)\sum_n s_n y^n$ für gegen $+1$ wachsende reelle y gleich $\lim s_n$ ist, falls dieser letztere Grenzwert existiert und endlich ist. Pringsheim zeigte ergänzend, daß $g(y) \to \infty$ strebt, falls die Folge (s_n) *eigentlich* divergiert (d. h. falls $\Re(s_n)$ *oder* $\Im(s_n)$ gegen $+\infty$ *oder* $-\infty$ strebt). Unser Satz lehrt nun, daß es zu diesem Schlusse schon genügt, wenn (s_n) im Sinne unserer Definition *bestimmt* gegen ∞ divergiert, wenn also ihr Kern nur aus dem Punkt ∞ besteht.

[Daß eine Folge (s_n) in unserem Sinne bestimmt divergieren kann, ohne im Pringsheimschen Sinne eigentlich zu divergieren, lehrt das folgende einfache Beispiel: Man bezeichne die auf demselben Nullstrahl gelegenen Gitterpunkte $0, 2-i, 4-2i, \ldots$ der Reihe nach mit $s_0 = 0, s_2, s_4, \ldots$ und ebenso die auf dem Nullstrahl von 0 über $-1+2i$ gelegenen mit $s_1 = -1+2i, s_3, s_5, \ldots$. Dann ist (s_n) keine im Pringsheimschen Sinne *eigentlich* divergente Folge; da ihr Kern aber offenbar nur aus dem Punkt ∞ besteht, ist sie in unserm Sinne *bestimmt* divergent gegen ∞.[22]) Ihre A-Transformation, d. h. die Funktion $g(y) = (1-y)\sum_n s_n y^n$ strebt also gegen ∞ für reelle gegen $+1$ wachsende y.]

Man sieht noch, daß $f(x)$ für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ sicher dann bestimmt gegen ∞ divergiert, wenn dabei $|f(x)| \to +\infty$ strebt und zugleich alle Werte $f(x)$ in einem Winkelraum mit einer Öffnung $< \pi$ (und beliebigem Scheitelpunkt) liegen.

4. Unser Kernsatz enthält aber nicht nur die in **2.** genannten Permanenzsätze und deren in **3.** angegebene Ergänzung, sondern sagt allgemein, daß $\mathfrak{K}' \leqq \mathfrak{K}$ ist. Ist also (s_n) irgendeine Folge und sind z. B. $t_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$ ihre arithmetischen Mittel, so liegt der Kern von (t_n) im Kern von (s_n). Sind also speziell die s_n beschränkt, so liegt jeder Häufungspunkt der t_n im kleinsten konvexen Bereich, der alle Häufungspunkte der s_n einschließt. Ist andrerseits (s_n) eine beliebige *reelle* Folge, so ergibt sich so die bekannte Relation

$$\underline{\lim}\, s_n \leqq \underline{\lim}\, t_n \leqq \overline{\lim}\, t_n \leqq \overline{\lim}\, s_n .$$

[21]) A. Pringsheim, Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, Sitzungsber. d. bayr. Akad. **30** (1900), S. 39.

[22]) Dies Beispiel lehrt zugleich: Eine im Pringsheimschen Sinne eigentlich divergente Folge oder Reihe kann diese Eigenschaft schon durch gliedweise Multiplikation mit einer von 0 verschiedenen Konstanten (im obigen Beispiel etwa mit $1-i$) verlieren, eine in unserm Sinne bestimmt divergente Folge nicht.

Und entsprechendes gilt für jedes echte Verfahren $t_n = \sum_\nu a_{n\nu} s_\nu$ des von Toeplitz angegebenen Typus (siehe § 2, 2.) und allgemeiner für jedes unserer echten Limitierungsverfahren. Sind also $f(x)$ und $g(y)$ reell, so ist für $x \to \xi$ längs $\mathfrak{C}_x$ bzw. $y \to \eta$ längs $\mathfrak{C}_x$ stets

$$\underline{\lim} f(x) \leqq \underline{\lim} g(y) \leqq \overline{\lim} f(x).$$

Aber auch für viele *nicht-lineare* Mittelbildungen erhält man ähnliche Aussagen. So ergeben sich außer dem arithmetischen noch das *geometrische* und das *harmonische* Mittel als Spezialfälle von

$$(*) \qquad \Phi\left(\frac{\varphi(s_0)+\varphi(s_1)+\ldots+\varphi(s_n)}{n+1}\right),$$

wenn $\varphi(x) = x$, $\log x$ bzw. $\frac{1}{x}$ gesetzt wird und $\Phi(x)$ die dazu inverse Funktion bedeutet[22a]). Wählt man hier für $\varphi(x)$ irgendeine, etwa für $x > x_0$ definierte stetige und im engeren Sinne monotone Funktion und bezeichnet mit $\Phi(x)$ die dazu inverse Funktion, so stellt (*) oder noch allgemeiner

$$(**) \qquad t_n = \Phi(a_{n0}\varphi(s_0) + a_{n1}\varphi(s_1) + \ldots + a_{nn}\varphi(s_n))$$

eine nicht-lineare Mittelbildung sehr allgemeiner Art dar, falls alle $s_\nu \geqq x_0$ sind. Entspricht nun die Matrix $(a_{n\nu})$ einem echten Limitierungsverfahren, so zeigt die Anwendung des Kernsatzes auf den Übergang von $\varphi(s_n)$ zu $\varphi(t_n)$, daß auch jetzt wieder stets

$$\underline{\lim}\, s_n \leqq \underline{\lim}\, t_n \leqq \overline{\lim}\, s_n$$

ausfällt.

5. Zeigt so der Kernsatz, daß die Wirkungsweise unserer Limitierungsverfahren auf einer Zusammenschnürung des Kernes des betreffenden Grenzprozesses beruht, so wird allgemein die verschiedene Kraft dieser Limitierungsverfahren dadurch zum Ausdruck kommen, daß diese Zusammenschnürung mehr oder minder stark ist. Man könnte demgemäß ein V_1-Verfahren stärker nennen als ein V_2-Verfahren, wenn bei jeder Funktion $f(x)$, auf die sie beide anwendbar sind, der Kern der V_1-Transformation von $f(x)$ im Kern der V_2-Transformation gelegen ist, — kürzer (s. § 4, 2.), wenn der V_1-Kern im V_2-Kern liegt[23]). Die

[22a]) Über diese nicht-linearen Mittelbildungen vgl. K. Knopp, Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 387—403.

[23]) Doch brauchen bekanntlich zwei verschiedene Verfahren im Sinne dieser Definition nicht vergleichbar zu sein. Vgl. auch die nachfolgende Nr. 9.

folgenden Nummern sollen dies Verhältnis noch an einigen markanten Beispielen erläutern.

6. *Für jedes $p > -1$ liegt der A-Kern einer Folge (s_n) in ihrem C_p-Kern.* Genauer: Es seien (vgl. § 3, 8.)

$$\sigma_n = \frac{S_n^{(p)}}{\binom{n+p}{n}} \text{ die } p\text{-ten Cesàroschen Mittel von } s_n$$

und $\mathfrak{K}$ der Kern der Folge σ_n; es sei ebenso

$$g(y) = (1-y)\sum_n s_n y^n \text{ die Abelsche Transformation von } (s_n)$$

und $\mathfrak{K}'$ der Kern von $g(y)$ für $y \to +1$ längs der Strecke $0 \ldots 1$. *Dann ist* $\mathfrak{K}' \leqq \mathfrak{K}$. In der Tat ist

$$g(y) = (1-y)^{p+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+p}{\nu} \sigma_\nu y^\nu$$

und geht also aus der Folge (σ_ν) durch Anwendung eines Verfahrens vom Perronschen Typus (s. § 2, 1.) mit

$$\varphi_\nu(y) = (1-y)^{p+1} \binom{\nu+p}{\nu} y^\nu$$

hervor. Für alle in Betracht kommenden ν und y ist $\varphi_\nu(y) \geqq 0$ und $\Phi(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(y) = 1$. Da somit $g(y)$ durch eine echte Transformation aus den σ_ν hervorgeht, ist $\mathfrak{K}' \leqq \mathfrak{K}$.

7. a) *Für jedes $p > 0$ liegt der B-Kern einer Folge (s_n) in ihrem E_p-Kern.* Genauer: Es seien[19])

$$\sigma_n = \frac{1}{(2^p)^n}\left[\binom{n}{0}(2^p-1)^n s_0 + \ldots + \binom{n}{\nu}(2^p-1)^{n-\nu} s_\nu + \ldots + \binom{n}{n} s_n\right]$$

die p-ten Eulerschen Mittel von (s_n) und $\mathfrak{K}$ der Kern der Folge (σ_n); es sei ebenso

$$g(y) = e^{-y} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!} y^\nu$$

die Borelsche Transformation von (s_n) und $\mathfrak{K}'$ der Kern von $g(y)$ für $y \to +\infty$ längs der positiv reellen Achse. *Dann ist wieder* $\mathfrak{K}' \leqq \mathfrak{K}$. Es ist nämlich, wenn wir zur Abkürzung $2^p - 1 = q$ setzen,

$$e^{qy} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!} y^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\left[\binom{\nu}{0} q^\nu s_0 + \ldots + \binom{\nu}{\nu} s_\nu\right] y^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sigma_\nu}{\nu!} ((q+1)y)^\nu$$

und folglich

$$g(y) = e^{-(q+1)y} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\sigma_\nu}{\nu!} ((q+1)\, y^\nu).$$

Es geht also $g(y)$ aus den σ_ν wieder durch Anwendung eines Verfahrens vom Perronschen Typus mit

$$\varphi_\nu(y) = e^{-(q+1)y} \cdot \frac{((q+1)\, y)^\nu}{\nu!}$$

hervor. Da dies Verfahren offenbar wieder echt ist, ist $\mathfrak{K}' \leqq \mathfrak{K}$.

b) Besonders einfach gestaltet sich der Beweis des folgenden (bekanntlich nicht umkehrbaren) Satzes der Theorie der B-Summierbarkeit: *Ist $a_0 + a_1 + \ldots$ B-summierbar, so ist es auch $0 + a_0 + a_1 + \ldots$, und beide Reihen haben dieselbe B-Summe*; oder: *Aus*

$$e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_{n-1}}{n!}\, x^n = f(x) \to s \quad \textit{für} \quad x \to +\infty$$

folgt

$$e^{-y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n!}\, y^n = g(y) \to s \quad \textit{für} \quad y \to +\infty.$$

In der Tat geht $g(y)$ durch die offenbar *echte* Transformation

$$g(y) = \int_0^y e^{-(y-x)} f(x)\, dx$$

aus $f(x)$ hervor. Zugleich lehrt dies genauer, daß der B-Kern der Folge $s_0, s_1, \ldots$ stets denjenigen der Folge $0, s_0, s_1, \ldots$ enthält.

8. Daß für jedes ganzzahlige $p > 0$ der H_{p+1}-Kern einer Folge (s_n) in ihrem H_p-Kern liegt, ist nach dem in **4.** Gesagten selbstverständlich, da die $(p+1)$-ten Hölderschen Mittel die gewöhnlichen arithmetischen Mittel von den p-ten sind. Für die Cesàroschen Mittel gilt das Entsprechende sogar ohne die Beschränkung auf ganzzahlige Ordnungen: *Ist $-1 < p < q$, so liegt der C_q-Kern einer Folge (s_n) in ihrem C_p-Kern.* In der Tat, die Cesàroschen Mittel einer beliebigen reellen Ordnung $r > -1$ sind (vgl. § 3, 8.)

$$\frac{S_n^{(r)}}{\binom{n+r}{n}},$$

wo die $S_n^{(r)}$ formal durch den Ansatz

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} s_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(r)}\, x^n$$

definiert sind. Sind also σ_n die p-ten und τ_n die q-ten Mittel, so ist,

wenn noch $q - p = d$ gesetzt wird,

$$\tau_n = \frac{1}{\binom{n+q}{n}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+d-1}{n-\nu} \binom{\nu+p}{\nu} \sigma_\nu .$$

Hiernach gehen die τ_n aus den σ_n durch eine echte Transformation vom Toeplitzschen Typus (s. § 2, 2.) hervor, denn es ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n-\nu+d-1}{n-\nu} \binom{\nu+p}{\nu} = \binom{n+q}{n}$$

und alle Summanden links sind $\geqq 0$.

9. Nicht so selbstverständlich — im Gegenteil im Hinblick auf den Äquivalenzsatz des C- und H-Verfahrens [24]) einigermaßen überraschend — ist die Tatsache, *daß für jedes ganzzahlige* $p \geqq 0$ *der* H_p*-Kern einer Folge* (s_n) *in ihrem* C_p*-Kern liegt und für* $p \geqq 2$ [25]) *im allgemeinen eine echte Teilmenge desselben bildet.* Der Beweis ergibt sich aber unmittelbar aus der folgenden von I. Schur [26]) aufgestellten Relation zwischen den C_p-Mitteln σ_n und den H_p-Mitteln τ_n ein und derselben Folge (s_n): Es ist

$$(*) \qquad \tau_n = \alpha_0 \sigma_n + \alpha_1 M(\sigma_n) + \alpha_2 M^2(\sigma_n) + \ldots + \alpha_{p-1} M^{p-1}(\sigma_n).$$

Hierbei sind $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ reelle positive Zahlen mit der Summe 1, $M(\sigma_n)$ bedeutet das n-te Glied der Folge der arithmetischen Mittel der σ_n, bedeutet also $\frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_n}{n+1}$, und für $k \geqq 2$ soll $M^k(\sigma_n) = M(M^{k-1}(\sigma_n))$ sein.

Hiernach gehen die τ_n aus den σ_n wieder durch ein offenbar echtes Verfahren des Toeplitzschen Typus hervor. Der Kern der (τ_n) liegt also im Kern der (σ_n). Daß er eine *echte* Teilmenge derselben sein kann, zeigt das folgende einfache Beispiel, bei dem wir uns $p = 2$ denken: wir definieren die s_n dadurch, daß wir

$$\sigma_0 = 1, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 1, \quad \sigma_3 = 0, \quad \ldots$$

setzen, so daß $\underline{\lim}\, \sigma_n = 0$, $\overline{\lim}\, \sigma_n = +1$ und der C_2-Kern $\mathfrak{K}$ der Folge (s_n) also aus der Strecke $0 \ldots 1$ besteht. Da nun für $p = 2$ die Relation $(*)$, wie man leicht verifiziert,

$$\tau_n = \frac{1}{2} \sigma_n + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_n}{n+1}$$

[24]) Vgl. etwa die in [20]) genannte Arbeit von I. Schur oder das in [19]) genannte Buch § 60, Satz 2.

[25]) Für $p = 0$ und $p = 1$ ist einfach $\tau_n = \sigma_n$.

[26]) Vgl. [20]).

lautet, so ergibt sich, daß $\underline{\lim}\, \tau_n = \frac{1}{4}$, $\overline{\lim}\, \tau_n = \frac{3}{4}$ ist, daß also der H_2-Kern $\mathfrak{K}'$ derselben Folge (s_n) aus der Strecke $\frac{1}{4} \ldots \frac{3}{4}$ besteht.

Aus diesem Ergebnis wird noch ein Umstand verständlich, der sich bei allen adäquaten Beweisen des Äquivalenzsatzes des C- und H-Verfahrens aufgedrängt hat, nämlich, daß es leichter ist, bei der gleichen Ordnung p aus der Konvergenz der C_p-Mittel auf die der H_p-Mittel einer Folge (s_n) zu schließen, als umgekehrt; denn der Kern der ersteren schließt stets den der letzteren ein, während das Umgekehrte im allgemeinen nicht der Fall ist.

10. Das Ergebnis der vorigen Nummer liefert u. a. auch einen neuen Beweis für die von I. Schur a. a. O. hervorgehobene Tatsache, daß der eben erwähnte Äquivalenzsatz des C- und H-Verfahrens nur noch zur Hälfte richtig ist — selbst bei Beschränkung auf reelle Folgen —, wenn der Grenzwert ∞ zugelassen wird: Bei reellen Folgen (s_n) folge zwar aus $\sigma_n \to +\infty$ stets $\tau_n \to +\infty$, aber, wie an einem Beispiele (s. u.) gezeigt wird, nicht notwendig das Umgekehrte (σ_n und τ_n sollen die in **9.** festgelegte Bedeutung haben). Als Spezialfall unseres Ergebnisses über die Lage des C_p- zum H_p-Kern sehen wir jetzt allgemeiner: *Bei beliebigen komplexen Folgen* (s_n) *folgt aus der bestimmten Divergenz von* σ_n *gegen* ∞ *diejenige von* τ_n *gegen* ∞. Daß dagegen das Umgekehrte nicht allgemein richtig ist, lehrt schon das von I. Schur gegebene Beispiel, bei dem für $\nu = 1, 2, \ldots$

$$\sigma_{2\nu-1} = \nu, \qquad \sigma_{2\nu} = 0$$

gewählt wird, wodurch ja eindeutig eine reelle Folge (s_n) definiert ist, deren C_p-Mittel diese σ_n sind ($p \geqq 2$). Der C_p-Kern $\mathfrak{K}$ dieser Folge (s_n) ist also die positiv-reelle Achse, die σ_n sind unbestimmt divergent. Nach der Relation (*) in **9.** ist nun

$$\tau_n > \alpha_1 \frac{\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_n}{n+1},$$

so daß die (ebenfalls reelle) Folge der $\tau_n \to +\infty$ strebt, der H_p-Kern $\mathfrak{K}'$ von (s_n) besteht also nur aus dem einen Punkt ∞; die τ_n divergieren bestimmt gegen ∞.

Diese Folge liefert zugleich ein zweites Beispiel für die in **9.** hervorgehobene Tatsache, daß $\mathfrak{K}'$ eine echte Teilmenge von $\mathfrak{K}$ sein kann.

11. Über das Verhältnis der C_p- und H_p-Transformation einer *reellen* Folge (s_n) bei dem gleichen ganzzahligen $p \geqq 0$ hat S. Dobrowolski den folgenden Satz bewiesen[27]): Die reelle Folge (s_n) *sei* C_{p+1}-limitierbar zum

[27]) S. Dobrowolski, Sur les valeurs limites de moyennes de Cesàro et de Hölder, Bull. Acad. Polon. Krakau 1925, p. 259–264.

Werte s und es seien, wie in **9.** und **10.**, σ_n die C_p- und τ_n die H_p-Mittel dieser Folge (s_n). *Dann ist*

$$s - \underline{\lim}\, \sigma_n = p!\,(s - \underline{\lim}\, \tau_n)$$

und

$$\overline{\lim}\, \sigma_n - s = p!\,(\overline{\lim}\, \tau_n - s).$$

In unserer Ausdrucksweise heißt dies: Für eine reelle, zum Werte s C_{p+1}-limitierbare Folge (s_n) ist der C_p-Kern eine genau $p!$-mal so lange Strecke als der H_p-Kern, mit s als Zentrum der Streckung[28]). Wir können dies Ergebnis nun unmittelbar für komplexe Folgen nutzbar machen und haben den

Satz. *Es sei (s_n) eine beliebige C_{p+1}-limitierbare Folge und s ihr C_{p+1}-Limes. Es sei $\mathfrak{K}$ der Kern ihrer C_p-Transformation (σ_n) und $\mathfrak{K}'$ derjenige ihrer H_p-Transformation (τ_n). Dann geht $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{K}'$ durch eine von s als Zentrum aus vorgenommene Streckung im Verhältnis $1 : p!$ hervor.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar, wenn man den eben zitierten Satz von S. Dobrowolski auf die Folge der reellen Teile von $e^{-i\gamma}(s_n - s)$ anwendet und dabei γ alle Werte von 0 bis 2π annehmen läßt.

12. Bei der in § 3, 12. behandelten Transformation

$$t_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx,$$

in der $f(x) = \frac{1}{2}[F(x_0 + 2x) + F(x_0 - 2x)]$ sein sollte und daher t_n die arithmetischen Mittel der Teilsummen der Fourierreihe von $F(x)$ an der Stelle x_0 waren, lehrt unser Kernsatz sofort (vgl. Nr. 4), daß an jeder Stelle x_0

$$\underline{\lim_{x \to 0}}\, f(x) \leqq \overline{\lim}\, t_n \leqq \overline{\lim_{x \to 0}}\, f(x)$$

ist[29]).

Und hierin ist insbesondere das Ergebnis enthalten, daß, wenn die Fourierreihe von $F(x)$ an einer Stelle x_0 konvergiert oder C_1-summierbar ist zum Werte s, dieser Wert s ebenfalls der Ungleichung

$$\underline{\lim_{x \to 0}}\, f(x) \leqq s \leqq \overline{\lim_{x \to 0}}\, f(x)$$

---

[28]) Beim Beispiel am Ende von Nr. 9 geht $\mathfrak{K}$ in der Tat aus $\mathfrak{K}'$ durch Streckung im Verhältnis $1 : 2$ vom Zentrum $\frac{1}{2}$ aus hervor.

[29]) Vgl. H. Lebesgue, Leçons sur les séries trigonométriques, Paris 1906, p. 98.

genügt. Aber man überzeugt sich leicht, daß diese Ungleichung schon dann bestehen muß, wenn die Fourierreihe von $F(x)$ im Punkte x_0 für irgendein $p > -1$ C_p-summierbar ist zum Werte s, — und noch allgemeiner, wenn sie durch irgend eines unserer echten Verfahren zum Werte s summierbar ist, dessen Kern den C_1-Kern enthält oder in ihm enthalten ist.

Von hier ist es nur ein Schritt zu der weiteren Feststellung[30]), daß die $t_n = t_n(x_0)$ als Funktionen von x_0 nicht die sogenannte Gibbssche Erscheinung aufweisen können, sowie zu den schönen Fejérschen Sätzen über gewisse Mittelkurven einer Fourierreihe[31]). Doch ist es hierzu vorteilhafter, die am Schluß der Einleitung angedeutete Ausdehnung unserer Untersuchungen zu benutzen.

Der Fejérsche Satz ist von Lebesgue in folgender Weise erweitert worden: Setzt man in $0 < x \leqq \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{2}(F(x_0 + 2x) + F(x_0 - 2x)) - s = f_1(x)$$

und

$$\frac{1}{x}\int_0^x |f_1(t)|\, dt = f^*(x)$$

und strebt $f^*(x) \to 0$ für $x \to +0$ (kürzer: ist $C_1\text{-}\lim |f_1(x)| = 0$), so ist die Fourierreihe von $F(x)$ an der Stelle x_0 C_1-summierbar zum Werte s.[32]) Wir beweisen — ohne die Voraussetzung $f^*(x) \to 0$ — etwas allgemeiner, daß, wenn t_n die bisherige Bedeutung hat,

$$\overline{\lim}\, |t_n - s| \leqq 2\pi \overline{\lim_{x \to +0}}\, f^*(x)$$

ist. Nach § 3, 12. ist nämlich

$$t_n - s = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) \left(\frac{\sin nx}{\sin x}\right)^2 dx.$$

Wegen $\sin x \geqq \frac{2}{\pi} x$ in $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ und $\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leqq \frac{2}{1+z}$ für $z \geqq 0$ folgt hieraus

---

[30]) L. Fejér, Über die Fouriersche Reihe, Math. Annalen **64** (1907), S. 273–288.

[31]) L. Fejér, Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen, Rend. Circ. Mat. Palermo **38** (1914), S. 79–97.

[32]) L. Fejér, Über die arithmetischen Mittel erster Ordnung der Fourierreihe, Gött. Nachr. 1925, S. 13–17. Hier ist auch die ältere Literatur zu diesem Satze angegeben. — Die oben benutzten Abschätzungen sind dieser Arbeit entnommen.

$$|t_n - s| \leqq 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_1(x)| \cdot \frac{n}{(1+nx)^2}\, dx$$

und durch partielle Integration weiter

$$|t_n - s| \leqq 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^*(x)\, \frac{2n^2 x}{(1+nx)^3}\, dx + \frac{K}{n},$$

wenn K eine geeignete Konstante bezeichnet. Da man nun sofort verifiziert, daß das hierstehende Integral eine echte Transformation von $f^*(x)$ bewirkt, so folgt hieraus nach dem Kernsatz unmittelbar unsere Behauptung.

Tübingen, den 18. Februar 1929.

(Eingegangen am 20. Februar 1929.)

Über einige Eigenschaften der orthogonalen Funktionensysteme.

Von

Alfred Haar in Szeged.

Einleitung.

1. Die klassischen Beispiele der orthogonalen Funktionensysteme — die trigonometrischen Funktionen, die Legendreschen Polynome — besitzen die wohlbekannte Oszillationseigenschaft. Ordnet man das System in der herkömmlichen Weise, so verschwindet die n-te Funktion genau $(n-1)$-mal innerhalb des Innervalls, für das die Orthogonalitätsrelation gilt. Diese Eigenschaft ist keineswegs eine Folge der Orthogonalität dieser Funktionen; in der Tat hat Herr Kellogg in der Einleitung einer Arbeit[1]), in der er ein höchst interessantes hinreichendes Kriterium für solche Oszillationseigenschaften beweist, ein Beispiel dreier zueinander orthogonalen stetigen Funktionen angegeben, von denen keine mehr als einmal verschwindet.

Will man sich daher Aufklärung über den geometrischen Verlauf der Funktionen eines orthogonalen Funktionensystems verschaffen, und will man insbesondere feststellen, in welchem Maße jene für die erwähnten Beispiele geltenden Oszillationseigenschaften auf beliebige orthogonale Funktionensysteme übertragbar sind, so muß man zunächst die Frage nach der Anzahl und Lage der Nullstellen aufgeben und das oszillatorische Verhalten in anderer Weise charakterisieren. Nun besitzt man bekanntlich in der Totalvariation ein Maß für die Oszillation, und auf diese Weise wird man auf den Gedanken geführt, die Totalvariation der Funktionen eines Orthogonalsystems zu untersuchen.

Hierüber beweisen wir den folgenden

Satz 1. *Es seien*

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$$

[1]) American Journal of Mathematics **38** (1916), S. 1—5.

n im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte normierte Orthogonalfunktionen, d. h. es sei

$$\int_0^1 (\varphi_p(x))^2 dx = 1, \quad \int_0^1 \varphi_p(x)\,\varphi_q(x)\,dx = 0; \qquad p \gtrless q, \quad p, q = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Totalvariation mindestens einer dieser Funktionen ist größer oder gleich $\sqrt{n}$, falls n eine gerade Zahl ist, und größer oder gleich $\sqrt{n - \frac{1}{n}}$, falls n ungerade ist.

Dieser Satz gibt uns ein Mittel, ein unendliches Orthogonalsystem von Funktionen von beschränkter Schwankung nach der Größe der Totalvariationen zu ordnen, da die Anzahl derjenigen Funktionen des Systems, deren Totalvariation unterhalb einer gegebenen Schranke bleibt, endlich ist.

2. Die Methode, mit deren Hilfe ich diesen Satz beweise, liefert für Orthogonalsysteme, deren Funktionen im Definitionsintervall dem Betrage nach unterhalb einer festen Schranke bleiben, d. h. für welche

$$|\varphi_p(x)| \leqq M; \qquad p = 1, 2, \ldots, n, \quad 0 \leqq x \leqq 1 \tag{1}$$

ist[2]), ein Resultat über die Anzahl der Nullstellen bzw. derjenigen Stellen, wo ein Zeichenwechsel stattfindet. Unter M können wir die genaue obere Schranke des Systems verstehen. Von einer stetigen Funktion sagen wir, daß sie an einer Stelle ihr Vorzeichen wechselt, falls sie in beliebiger Nähe dieser Stelle sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Dementsprechend setzen wir fest, *daß eine unstetige Funktion an einer Stelle ihr Vorzeichen ändert, falls in jeder hinreichend kleinen Umgebung dieser Stelle die Funktion sowohl positive als auch negative Werte an je einer Punktmenge vom positiven Maße annimmt.* Für stetige Funktionen ist dies der übliche Begriff des Zeichenwechsels; für unstetige Funktionen benötigen wir diese allgemeine Fassung dem Umstande gemäß, daß man den Wertevorrat der vorgelegten Orthogonalfunktionen an einer Nullmenge beliebig abändern kann. Es gilt der folgende

Satz 2. *Wenn die n im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierten normierten Orthogonalfunktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ die Bedingung (1) erfüllen, d. h. dem Betrage nach unterhalb einer vom Zeiger unabhängigen Schranke bleiben, so gibt es unter diesen Funktionen mindestens eine, die an mindestens*

$$\left[\frac{4}{27}\,\frac{n}{M^4}\right]$$

verschiedenen Stellen ihr Vorzeichen ändert.

---

[2]) Man beachte, daß wegen der Normierung des Orthogonalsystems $M \geqq 1$ sein muß.

Als Spezialfall ergibt sich daraus ein Satz, den Herr Plancherel[3]) über die Nullstellen eines unendlichen Systems von stetigen Orthogonalfunktionen abgeleitet hat.

Der letzte Satz ist einer Verallgemeinerung fähig, wenn man den folgenden Begriff einführt: Wir sagen, daß die *Funktion* $y = \varphi(x)$ *die Gerade* $y = \mu$ *an einer Stelle durchsetzt, falls an dieser Stelle die Funktion* $\varphi(x) - \mu$ *ihr Vorzeichen ändert.* Über die Anzahl dieser Stellen gilt der

Satz 3. *Wenn die vorgelegten* n *Orthogonalfunktionen die Voraussetzungen des Satzes 2. erfüllen, und wenn* μ *der Bedingung*

$$\mu | < \frac{1}{M} \leqq 1$$

genügt, so gibt es unter diesen Orthogonalfunktionen mindestens eine, welche die Gerade $y = \mu$ *an mindestens*

$$\left[\frac{4}{27}\frac{(1-|\mu|M)^3}{M(M-|\mu|)(M+|\mu|)^2}n\right]$$

verschiedenen Stellen durchsetzt.

§ 1.

Die Totalvariation der Funktionen eines Orthogonalsystems.

3. Der gemeinsame Ausgangspunkt der Beweise dieser Sätze ist die bekannte Besselsche Ungleichung: Ist $f(x)$ eine beliebige im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ definierte Funktion, die samt ihrem Quadrate integrierbar ist, so gilt die Ungleichung

$$\left(\int_0^1 f(x)\,\varphi_1(x)\,dx\right)^2 + \left(\int_0^1 f(x)\,\varphi_2(x)\,dx\right)^2 + \ldots + \left(\int_0^1 f(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 (f(x))^2\,dx,$$

wobei $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ ein beliebiges normiertes Orthogonalsystem (im obigen Intervall) bedeuten. Wir wenden diese Ungleichung auf k Funktionen $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ an (die zweckmäßigste Wahl der natürlichen Zahl k werden wir später angeben), und erhalten durch Addition:

$$\sum_{p=1}^{k}\left(\int_0^1 f_p\varphi_1\,dx\right)^2 + \sum_{p=1}^{k}\left(\int_0^1 f_p\varphi_2\,dx\right)^2 + \ldots + \sum_{p=1}^{k}\left(\int_0^1 f_p\varphi_n\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 (f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_k^2)\,dx.$$

[3]) Math. Annalen **68** (1910), S. 270—278.

Daher muß mindestens eine der links stehenden Summen kleiner oder gleich

$$\frac{1}{n}\int_0^1 (f_1^2+f_2^2+\ldots+f_k^2)\,dx$$

ausfallen; mit anderen Worten, es besitzt mindestens eine der vorgelegten n Orthogonalfunktionen — wir bezeichnen diese durch Unterdrücken des Zeigers mit $\varphi(x)$ — die Eigenschaft, daß

$$\sum_{p=1}^{k}\Big(\int_0^1 f_p(x)\,\varphi(x)\,dx\Big)^2 \leqq \frac{1}{n}\int_0^1 (f_1^2+f_2^2+\ldots+f_k^2)\,dx$$

ist. Die Funktionen $f_p(x)$ wählen wir nun folgendermaßen: Wir teilen das Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ in k gleiche Teile und setzen $f_p(x)$ gleich 1 innerhalb und gleich 0 außerhalb des p-ten Teilintervalls, d. h.

$$\begin{aligned} f_p(x) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq x < \frac{p-1}{k} \quad \text{und} \quad \frac{p}{k} < x \leqq 1, \\ &= 1 \quad \text{für} \quad \frac{p-1}{k} \leqq x \leqq \frac{p}{k}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung liefert die Aussage, daß *mindestens eine der n vorgelegten normierten Orthogonalfunktionen die Ungleichung*

$$\sum_{p=1}^{k}\Big(\int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi\,dx\Big)^2 \leqq \frac{1}{n} \tag{2}$$

befriedigt (freilich erhält man im allgemeinen für verschiedene Werte von k verschiedene Funktionen des Orthogonalsystems). Wir werden zeigen, daß — bei passender Wahl der natürlichen Zahl k — die Totalvariation dieser Funktion für gerades n nicht kleiner als $\sqrt{n}$, für ungerades n aber nicht kleiner als $\sqrt{n-\frac{1}{n}}$ ist.

4. Zu diesem Ende benutzen wir einen Satz, der eine Beziehung zwischen der Totalvariation, dem Integral einer Funktion und dem Integral des Quadrates der Funktion liefert. Die betreffende Tatsache ist eine geringfügige Verallgemeinerung eines sehr interessanten Satzes, den Herr Walsh[4]) zum Studium des von mir in meiner Dissertation eingeführten Orthogonalsystems herangezogen hat. Obwohl man den fraglichen Satz leicht aus dem Walshschen ableiten kann, erlaube ich mir hier einen independenten Beweis anzugeben, der wegen seiner Kürze nicht uninteressant zu sein scheint.

[4]) Math. Annalen **90** (1923), S. 38—45.

Es sei $f(x)$ eine in einem Intervall von der Länge l definierte Funktion, die daselbst samt ihrem Quadrat integrierbar ist:

$$\int_{(l)} f(x)\,dx = \alpha, \qquad \int_{(l)} (f(x))^2\,dx = \beta^2;$$

dann gilt für die Totalvariation v dieser Funktion in diesem Intervall die Ungleichung:

$$v^2 \geqq \frac{4}{l^2}(\beta^2 l - \alpha^2). \tag{3}$$

In der Tat ist die betrachtete Funktion $f(x)$ stetig, und bezeichnet man mit M bzw. m das Maximum bzw. das Minimum dieser Funktion, so ist für alle x

$$(f(x) - M)(f(x) - m) \leqq 0,$$

folglich

$$\int_{(l)} (f(x) - M)(f(x) - m)\,dx = \beta^2 - (M + m)\alpha + Ml \leqq 0. \tag{4}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{(M-m)^2 l}{4} \geqq \beta^2 - (M+m)\alpha + \frac{(M+m)^2 l}{4} = \frac{\beta^2 l - \alpha^2}{l} + \left(\frac{M+m}{2}\sqrt{l} - \frac{\alpha}{\sqrt{l}}\right)^2,$$

also

$$(M-m)^2 \geqq \frac{4}{l^2}(\beta^2 l - \alpha^2), \tag{5}$$

um so mehr die behauptete Ungleichung (3). Ist die Funktion $f(x)$ nicht stetig, so bleibt die Ungleichung (4) und damit auch (5) bestehen, falls M bzw. m das sogenannte Lebesguesche Maximum bzw. Minimum von $f(x)$ bedeutet; d. h. M ist die untere Grenze derjenigen Größen, für welche die Ungleichung $f(x) > M$ höchstens an einer Punktmenge vom Maße Null statthat, und analog wird m definiert. Da die Totalvariation jedenfalls nicht kleiner als die Differenz $M - m$ ist, so ist die fragliche Ungleichung (3) in voller Allgemeinheit bewiesen.

5. Wir wenden nun die Ungleichung (3) auf die oben gefundene Funktion $\varphi(x)$ des vorgelegten Orthogonalsystems und auf das Intervall $\frac{p-1}{k} \leqq x \leqq \frac{p}{k}$ von der Länge $\frac{1}{k}$ an und erhalten, wenn wir die Totalvariation dieser Funktion in diesem Intervall mit v_p bezeichnen, die Abschätzung

$$v_p^2 \geqq 4k^2\left(\frac{1}{k}\int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi^2\,dx - \left(\int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi\,dx\right)^2\right).$$

Mit Rücksicht auf (2) und auf $\int_0^1 \varphi^2\,dx = 1$ folgt daraus durch Addition:

$$v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_k^2 \geqq 4k\left(1 - \frac{k}{n}\right);$$

daher gilt für die Totalvariation V von $\varphi(x)$ im Gesamtintervall $0 \leqq x \leqq 1$ die Ungleichung

$$V \geqq v_1 + v_2 + \ldots + v_k \geqq \sqrt{4k\left(1 - \frac{k}{n}\right)}.$$

In dieser Ungleichung ist die positive ganze Zahl k noch willkürlich (wie bemerkt, hängt $\varphi(x)$ von k ab); die günstigste Wahl von k ist für ein gerades n offenbar $k = \frac{n}{2}$, für ein ungerades n aber $k = \frac{n-1}{2}$ $\left(\text{oder } \frac{n+1}{2}\right)$. Bei dieser Wahl von k erhält man aus der letzten Ungleichung im ersten Fall $V \geqq \sqrt{n}$, im zweiten Fall aber $V \geqq \sqrt{n - \frac{1}{n}}$, womit Satz 1. bewiesen ist[5]).

§ 2.

Zeichenwechsel der Funktionen eines Orthogonalsystems.

6. Um zu dem zweiten in der Einleitung ausgesprochenen Satz zu gelangen, nehmen wir an, daß die vorgelegten n normierten Orthogonalfunktionen für $0 \leqq x \leqq 1$ der Ungleichung

$$|\varphi_p(x)| \leqq M \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen; wir werden zeigen, daß diejenige Funktion $\varphi(x)$ dieses Systems, die wir in 3. erhielten, bei passender Wahl von k an mindestens $\left[\frac{4}{27}\frac{n}{M^4}\right]$ verschiedenen Stellen ihr Vorzeichen ändert. Zu diesem Zweck betrachten wir die k Teilintervalle:

$$\frac{p-1}{k} \leqq x \leqq \frac{p}{k} \qquad (p = 1, 2, \ldots, k), \tag{6}$$

und teilen diese in zwei Klassen L' und L'' wie folgt ein: Ist $\varphi(x)$ stetig, so reihen wir ein Teilintervall in die Klasse L' ein, falls $\varphi(x)$ daselbst entweder überall nicht negativ oder überall nicht positiv ist. Ist aber $\varphi(x)$ nicht stetig, so weisen wir ein Teilintervall der Klasse L' zu, falls $\varphi(x)$ daselbst entweder fast[6]) überall nicht negativ, oder fast überall nicht positiv ist; es sei k' die Anzahl dieser Teilintervalle. Die übrigen Teilintervalle — ihre Anzahl ist $k'' = k - k'$ — gehören der zweiten Klasse L'' an. In jedem Teilintervalle dieser zweiten Klasse nimmt daher die Funktion $\varphi(x)$ sowohl positive als auch negative Werte an den Punkten je einer Punktmenge vom positiven Maße an. Ist $\varphi(x)$ stetig, so muß sie daher

[5]) Ob die so erhaltene untere Schranke für die Totalvariation von n normierten Orthogonalfunktionen sich noch vergrößern läßt, bleibt unentschieden. Die oben mit $f_1, f_2, \ldots, f_k$ bezeichneten Funktionen — wenn man sie mit $\sqrt{k}$ multipliziert — liefern ein Beispiel von k normierten Orthogonalfunktionen in $0 \leqq x \leqq 1$, die durchweg eine Totalvariation $\leqq 2\sqrt{k}$ besitzen.

[6]) D. h. überall mit eventueller Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null.

innerhalb jedes dieser Teilintervalle mindestens eine Nullstelle besitzen derart, daß in deren beliebiger Nähe die Funktion $\varphi(x)$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Ist aber $\varphi(x)$ nicht stetig, so muß *innerhalb* jedes Teilintervalles von L'' mindestens eine Stelle von der Beschaffenheit existieren, daß in jeder hinreichend kleinen Umgebung dieser Stelle die Funktion $\varphi(x)$ sowohl positive als auch negative Werte an Punktmengen vom positiven Maße annimmt. Denn man erkennt mit Leichtigkeit, indem man jenes Teilintervall halbiert, daß, falls der Halbierungspunkt selbst nicht die gewünschte Eigenschaft besitzt, einer der Hälften dieses Intervalls dieselbe Eigenschaft zukommt wie dem halbierten Teilintervall selbst, d. h. $\varphi(x)$ nimmt darauf sowohl positive als auch negative Werte an Punktmengen vom positivem Maße an. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man zu einem Grenzpunkt, der gewiß die geforderte Eigenschaft besitzt. Die Tatsache, daß einer der so erhaltenen Punkte *innerhalb* des betrachteten Teilintervalls liegt, folgt aus dem Umstande, daß, wenn man von den Enden dieses Teilintervalls ein hinreichend kleines Intervall wegläßt, das so erhaltene Intervall noch immer jene Eigenschaft besitzt, daß nämlich $\varphi(x)$ daselbst sowohl negative als auch positive Werte an Punktmengen vom positiven Maße annimmt.

Auf Grund dieser Überlegung können wir also schließen, daß innerhalb jedes zu der Klasse L'' gehörigen Teilintervalls mindestens eine Stelle liegt, an der — nach der in der Einleitung gegebenen Definition — die Funktion $\varphi(x)$ ihr Vorzeichen ändert. Die Anzahl ν dieser Stellen ist also größer oder gleich k'':

$$\nu \geqq k''.$$

7. Für jedes Teilintervall l' der ersten Klasse L' gilt die Ungleichung

$$\int_{(l')} \varphi^2 \, dx \leqq M \int_{(l')} |\varphi| \, dx = M \left| \int_{(l')} \varphi \, dx \right|;$$

für jedes Teilintervall l'' der zweiten Klasse wenden wir die triviale Ungleichung

$$\int_{(l'')} \varphi^2 \, dx \leqq \frac{M^2}{k}$$

an. Durch Addition aller dieser Ungleichungen erhält man

$$1 = \int_0^1 \varphi^2 \, dx \leqq k'' \frac{M^2}{k} + M \sum \left| \int_{(l')} \varphi \, dx \right|,$$

wobei die Summation rechter Hand auf alle Teilintervalle l' der Klasse L' zu erstrecken ist. Um so mehr gilt

$$1 \leqq k'' \frac{M^2}{k} + M \sum_{p=1}^{k} \left| \int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi \, dx \right|.$$

Die Schwarzsche Ungleichung liefert in Verbindung mit (2) unmittelbar

$$(7) \qquad \sum_{p=1}^{k} \int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} q\,dx \leqq \sqrt{\frac{k}{n}},$$

folglich ist

$$(8) \qquad \nu \geqq k'' \geqq \frac{k}{M^2}\left(1 - M\sqrt{\frac{k}{n}}\right).$$

Dieses Resultat gilt für jede natürliche Zahl k, d. h. man kann bei gegebenen k eine Funktion des vorgelegten Orthogonalsystems angeben, die an mindestens $\frac{k}{M^2}\left(1 - M\sqrt{\frac{k}{n}}\right)$ Stellen ihr Vorzeichen wechselt.

Wir gehen endlich zur Bestimmung des günstigsten Wertes von k über. Da das Maximum der Funktion $\frac{x}{M^2}\left(1 - M\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$ für $x = \frac{4}{9}\frac{n}{M^2}$ angenommen wird, so liegt der Gedanke nahe, für k die zu diesem Werte nächstliegende natürliche Zahl zu nehmen; wir setzen etwa

$$k = \frac{4}{9}\frac{n}{M^2} + \theta,$$

wobei $0 \leqq \theta < 1$ ist. Alsdann liefert die Ungleichung (8)

$$\nu \geqq \frac{1}{M^2}\left(\frac{4}{9}\frac{n}{M^2} + \theta\right)\left(1 - \sqrt{\frac{4}{9} + \theta\frac{M^2}{n}}\right);$$

da ferner

$$\frac{4}{9} + \theta\frac{M^2}{n} \leqq \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\theta\frac{M^2}{n}\right)^2$$

ist, so finden wir

$$\nu \geqq \frac{1}{M^2}\left(\frac{4}{9}\frac{n}{M^2} + \theta\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{4}\theta\frac{M^2}{n}\right) = \frac{4}{27}\frac{n}{M^4} - \frac{3}{4}\frac{\theta^2}{n} > \frac{4}{27}\frac{n}{M^4} - 1.$$

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes 2:

$$\nu \geqq \left[\frac{4}{27}\frac{n}{M^4}\right],$$

in Anbetracht dessen, daß ν seiner Bedeutung nach eine ganze Zahl ist[7]).

[7]) Als Korollar erhält man den Satz, *daß, falls keine der n im Intervall* $0 \leqq x \leqq 1$ *definierten Orthogonalfunktionen an mehr als* ν *Stellen ihr Vorzeichen ändert, das Maximum des absoluten Betrages mindestens einer dieser Funktionen größer oder gleich*

$$\sqrt[4]{\frac{4}{27}\frac{n}{\nu+1}}$$

sein muß.

8. Wir kommen endlich zum Beweis des Satzes 3. Zu diesem Ende ziehen wir wiederum die in 3. angegebene Funktion $\varphi(x)$ heran und bezeichnen mit μ eine Größe, die der Ungleichung $|\mu| < \frac{1}{M}$ und folglich — wegen $M \geqq 1$ — auch der Ungleichung $|\mu| < M$ genügt. Die Teilintervalle (6) ordnen wir wiederum in zwei Klassen L'_μ und L''_μ ein, wobei wir ein Teilintervall in die Klasse L'_μ reihen, falls daselbst die Funktion $\varphi(x) - \mu$ entweder fast überall nichtnegativ oder fast überall nichtpositiv ist; die übrigen Teilintervalle bilden die Klasse L''_μ. Ist k'_μ bzw. k''_μ die Anzahl der Teilintervalle dieser Klassen, so erkennt man — wörtlich wie oben —, daß die Anzahl der Stellen, wo $\varphi(x) - \mu$ das Vorzeichen ändert, größer oder gleich k''_μ ist; d. h. es ist $\nu_\mu \geqq k''_\mu$, wenn man — in der Terminologie der Einleitung — mit ν_μ die Anzahl derjenigen Stellen bezeichnet, an denen $\varphi(x)$ die horizontale Gerade von der Ordinate μ durchsetzt.

Für jedes Teilintervall l'_μ der ersten Klasse L'_μ gilt die Ungleichung:

$$\int_{(l'_\mu)} \varphi^2\,dx = \int_{(l'_\mu)} \varphi(\varphi-\mu)\,dx + \mu \int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx \leqq \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi(\varphi-\mu)\,dx\right| + |\mu| \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right|$$

$$\leqq M \int_{(l'_\mu)} |\varphi-\mu|\,dx + |\mu| \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right| = M \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx - \frac{\mu}{k}\right| + |\mu| \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right|;$$

für ein Intervall l''_μ der zweiten Klasse L''_μ wenden wir wiederum die Ungleichung

$$\int_{(l''_\mu)} \varphi^2\,dx \leqq \frac{M^2}{k}$$

an. Durch Addition aller dieser Ungleichungen folgt

$$1 = \int_0^1 \varphi^2\,dx \leqq k''_\mu \frac{M^2}{k} + M \sum \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx - \frac{\mu}{k}\right| + |\mu| \sum \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right|,$$

wobei die Summation rechts auf alle $k'_\mu = k - k''_\mu$ Teilintervalle der Klasse L'_μ zu erstrecken ist. Daraus entnimmt man unmittelbar

$$1 \leqq k''_\mu \frac{M^2}{k} + (k - k''_\mu)\frac{M|\mu|}{k} + (M + |\mu|) \sum \left|\int_{(l'_\mu)} \varphi\,dx\right|,$$

um so mehr

$$1 \leqq k''_\mu \frac{M(M-|\mu|)}{k} + M|\mu| + (M+|\mu|) \sum_{p=1}^{k} \left|\int_{\frac{p-1}{k}}^{\frac{p}{k}} \varphi\,dx\right|.$$

Man erhält daher mit Rücksicht auf (7)

$$\nu_\mu \geqq k''_\mu \geqq \frac{k}{M(M-|\mu|)}\left(1 - M|\mu| - (M+|\mu|)\sqrt{\frac{k}{n}}\right).$$

9. Setzen wir der Kürze halber

$$a = \frac{1 - M|\mu|}{M(M - |\mu|)}, \qquad b = \frac{M + |\mu|}{1 - M|\mu|} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(wegen der für μ gemachten Voraussetzungen ist $0 < a \leqq 1$, $b > 0$), so kommt es noch darauf an, in der Formel

$$\nu_\mu \geqq a k (1 - b\sqrt{k})$$

die günstigste Wahl für die natürliche Zahl k zu treffen. Dies wird durch die ganze Zahl

$$k = \frac{4}{9b^2} + \theta$$

erreicht, wobei $0 \leqq \theta < 1$ ist, da die obige Funktion von k an der Stelle $\frac{4}{9b^2}$ ihren Maximalwert erreicht. Wir erhalten, analog wie in 7.,

$$\nu_\mu \geqq a\left(\frac{4}{9b^2} + \theta\right)\left(1 - b\sqrt{\frac{4}{9b^2} + \theta}\right) \geqq a\left(\frac{4}{9b^2} + \theta\right)\left(1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} b^2 \theta\right)\right)$$

$$= \frac{4a}{27b^2} - \frac{3}{4} a b^2 \theta^2.$$

Die Behauptung des Satzes 3:

$$\nu_\mu \geqq \left[\frac{4a}{27b^2}\right] \tag{9}$$

folgt daraus unmittelbar, da für solche Werte der Größen n, M, μ, welche die Ungleichung

$$\frac{4a}{27b^2} \geqq 1$$

erfüllen (für andere Werte ist (9) trivial), wegen $0 < a \leqq 1$ und $0 \leqq \theta < 1$

$$\frac{3}{4} a b^2 \theta^2 \leqq \frac{1}{9} a^2 \theta^2 < 1$$

und daher

$$\nu_\mu > \frac{4a}{27b^2} - 1$$

gilt. Damit ist auch Satz 3 bewiesen.

(Eingegangen am 28. März 1929.)

Ein neuer Beweis des Ostrowskischen Überkonvergenzsatzes.

Von

Friedrich Lösch in Stuttgart.

In seiner Arbeit „Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten“ [1]) beweist Herr Ostrowski den folgenden schönen

Satz. *In der Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

möge es unendlich oft vorkommen, nämlich für $n = n_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots)$, *daß alle Koeffizienten* a_n, *deren Indizes den Ungleichungen*

$$n_\varkappa < n \leqq n_\varkappa (1 + \vartheta) \tag{2}$$

für ein von $\varkappa$ *unabhängiges* $\vartheta > 0$ *genügen, verschwinden. Ist dann* $a_{n'_\varkappa}$ *der erste nicht verschwindende Koeffizient hinter* $a_{n_\varkappa}$, *so setze man*:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n_1} z^{n_1}, \\ f_\varkappa(z) &= a_{n'_\varkappa} z^{n'_\varkappa} + a_{n'_\varkappa + 1} z^{n'_\varkappa + 1} + \ldots + a_{n_{\varkappa+1}} z^{n_{\varkappa+1}} \qquad (\varkappa > 0) \end{aligned} \tag{3}$$

und betrachte die Reihe:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} f_\varkappa(z). \tag{4}$$

Diese konvergiert über jeden regulären Punkt von $f(z)$ *auf dem Konvergenzkreis hinaus und stellt in einer gewissen Umgebung desselben die unmittelbare analytische Fortsetzung von* $f(z)$ *dar.*

Im folgenden soll für diesen Satz ein neuer, besonders einfacher Beweis gegeben werden. Er beruht auf der Anwendung einer „*allgemeinen E-Transformation*“, wie ich sie in meiner Arbeit „Eine Verallgemeinerung

[1]) A. Ostrowski, Berliner Sitzungsberichte 1921, S. 557–565.

der Eulerschen Reihentransformation mit funktionentheoretischen Anwendungen“ [2]) genauer untersucht habe. Dort wurde bewiesen:

Satz 1. *Ist die Funktion*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1 \tag{5}$$

im Punkte $z=1$ *regulär, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_n(z), \tag{6}$$

die aus (5) *entsteht, indem man dort für* z *die Funktion*

$$E(z,y)=[z_0+(z-z_0)\,y]\,y^k \quad (z_0 \text{ reell},\ 0<z_0<1;\ k>0 \text{ und ganz}) \tag{7}$$

einführt, nach Potenzen von y *ordnet* ($F_n(z)$ *sei der Koeffizient von* y^n) *und dann* $y=1$ *setzt, in einer gewissen Umgebung des Punktes* $z=+1$ *und stellt dort die unmittelbare analytische Fortsetzung von* (5) *dar* [3]).

Um daraus den Ostrowskischen Satz zu erschließen, setzen wir zunächst, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu tun, voraus, die Reihe (1) habe den Konvergenzradius Eins. Weiter genügt es offenbar, nachzuweisen, daß die Reihe (4) in einer gewissen Umgebung des Punktes $z=+1$ konvergiert und die Fortsetzung von $f(z)$ liefert, falls $z=+1$ ein regulärer Punkt ist. Für einen Punkt $e^{i\varphi}$ folgt dann dasselbe, indem man beachtet, daß

$$f(e^{i\varphi}z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{ni\varphi}z^n$$

dieselben Lücken hat wie (1).

Wir betrachten nun die $F_n(z)$. Die leichte Ausrechnung liefert, wenn man $n=mk+r$ $(0\leqq r<k)$ setzt:

$$F_{mk+r}(z)=\sum_{\nu=0}^{\left[\frac{m-r}{k+1}\right]}a_{m-\nu}\binom{m-\nu}{r+\nu k}z_0^{(m-r)-\nu(k+1)}(z-z_0)^{r+\nu k}. \tag{8}$$

In dieser Summe ist der Koeffizient mit höchstem Index a_m, der mit niederstem $a_{m-\left[\frac{m-r}{k+1}\right]}$. Da

$$m<\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(m-\left[\frac{m-r}{k+1}\right]\right)$$

ist, so folgt:

---

[2]) F. Lösch, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 725–753.

[3]) Der Beweis dieses Satzes ist sehr einfach; er folgt sofort aus dem Satz über mittelbare Funktionen und dem Weierstraßschen Doppelreihensatz. Im übrigen vgl. man loc. cit. [2]), S. 733 (2. Hauptsatz) und beachte, daß das durch (7) vermittelte Bild von $|y|\leqq 1$ ganz in das Innere der Vereinigungsmenge aus Einheitskreis und einer beliebig kleinen Umgebung von $+1$ fällt, falls z hinreichend nahe an $+1$ liegt.

Satz 2. *Wählt man* $k = \left[\frac{1}{\vartheta}\right] + 1$, *so treten in* $F_n(z)$ *nur Koeffizienten* a_ν *auf, deren Indizes den Ungleichungen*

$$N \leqq \nu < N(1+\vartheta) \tag{9}$$

genügen, wobei mit a_N *der Koeffizient* a *aus* $F_n(z)$ *mit niederstem Index bezeichnet ist und* ϑ *die im Ostrowskischen Satz genannte Zahl ist.*

Für das Folgende denken wir uns $k = \left[\frac{1}{\vartheta}\right] + 1$ gewählt. Das hat nach Satz 2 zur Folge, daß unter den Voraussetzungen des Ostrowskischen Satzes in jedem einzelnen $F_n(z)$ nur Koeffizienten a aus einem einzigen $f_\varkappa(z)$ auftreten. Würden nämlich in einem $F_n(z)$ etwa Koeffizienten aus $f_\varkappa(z)$ und aus $f_{\varkappa+1}(z)$ auftreten, so müßte — wie aus der Entstehung der $F_n(z)$ hervorgeht — insbesondere dasjenige $F_n(z)$, das als letztes in der Folge der $F_n(z)$ noch $a_{n_{\varkappa-1}}$ (und zwar als Koeffizienten a mit niederstem Index) enthält, auch $a_{n'_{\varkappa+1}}$ enthalten, was aber wegen (2) und (9) unmöglich ist.

Die Verhältnisse liegen demnach so: Ist $F_{\tau_\varkappa}(z)$ das letzte Glied der Reihe (6), das noch $a_{n_\varkappa}$ enthält, so enthalten

$$F_0(z),\ F_1(z),\ \ldots,\ F_{\tau_1}(z)$$

nur die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_{n_1}$; entsprechend enthalten

$$F_{\tau_1+1}(z),\ F_{\tau_1+2}(z),\ \ldots,\ F_{\tau_2}(z)$$

an nicht verschwindenden Koeffizienten nur $a_{n'_1}, a_{n'_1+1}, \ldots, a_{n_2}$ usw. Und nun ist leicht einzusehen, daß

$$\begin{aligned} F_0(z) + F_1(z) + \ldots + F_{\tau_1}(z) &= f_0(z), \\ F_{\tau_1+1}(z) + F_{\tau_1+2}(z) + \ldots + F_{\tau_2}(z) &= f_1(z), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot

Ein Satz über iterierte Integrale und seine Anwendung zur Untersuchung der Analytizität von komplexen Funktionen.

Von

J. Ridder in Baarn (Niederlande).

§ 1.

Der Satz lautet:

Die Funktion $f(x, y)$ sei im abgeschlossenen Rechteck $[x_1 \leqq x \leqq x_2;$ $y_1 \leqq y \leqq y_2]$ beschränkt. Sie möge für alle y mit Ausnahme einer Menge $E_1(y)$ vom Maße Null in bezug auf x im Riemannschen Sinne integrierbar sein; und sie möge in bezug auf y im Lebesgueschen Sinne integrierbar sein für alle x mit Ausnahme einer Menge $E_2(x)$, deren Komplementärmenge auf (x_1, x_2) überall dicht liegt[1]*. Es sei hierbei zugelassen, daß eine oder beide Mengen E_1, E_2 leer sind.*

Alsdann ist eine Funktion $F(y)$, welche $= \int_{x_1}^{x_2} (R)\, f(x, y)\, dx$ ist auf der Komplementärmenge von $E_1(y)$ und gleich einem willkürlichen Werte in jedem Punkte von $E_1(y)$, über das abgeschlossene Intervall (y_1, y_2) im Lebesgueschen Sinne integrierbar.

Auf verschiedene Weisen lassen sich gewisse Funktionswerte auf $E_2(x)$ hinzufügen[2]*, welche das Integral: $\int_{y_1}^{y_2} (L)\, f(x, y)\, dy$ erweitern zu einer Funktion $G(x)$, die über das abgeschlossene Intervall (x_1, x_2) integrierbar (R) ist.*

---

[1]) In der ursprünglichen Formulierung wurde die Menge $E_2(x)$ als vom Maße Null betrachtet. Die Abänderung verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von H. O. Perron.

[2]) Wenn also $E_2(x)$ leer ist, ist diese Hinzufügung nicht mehr notwendig und definiert das Integral schon völlig die über (x_1, x_2) (R)-integrierbare Funktion $G(x)$.

Bei „jeder" derartigen Funktion $G(x)$ wird:

$$(1) \qquad \int_{y_1}^{y_2} (L)\, F(y)\, dy = \int_{x_1}^{x_2} (R)\, G(x)\, dx$$

sein.

Beweis. Für jedes y des abgeschlossenen (y_1, y_2), welches nicht zu $E_1(y)$ gehört, ist:

$$\int_{x_1}^{x_2} (R)\, f(x, y)\, dx = \lim_{n=\infty} [f(\xi_1, y)\cdot h_1 + f(\xi_2, y)\cdot h_2 + \ldots + f(\xi_n, y)\cdot h_n],$$

wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ so in den Intervallen

$$(x_1, x_1 + h_1),\ (x_1 + h_1, x_1 + h_1 + h_2),\ \ldots,\ (x_1 + h_1 + \ldots + h_{n-1}, x_2)$$

gewählt werden, daß sie nicht zu $E_2(x)$ gehören. Dies ist immer möglich, da die Komplementärmenge von $E_2(x)$ auf (x_1, x_2) überall dicht liegt. Mit zunehmendem n soll die Länge des größten Intervalls der zugehörigen Teilung nach Null konvergieren. Der eingeklammerte Ausdruck stellt eine Funktion von y dar, welche über die Komplementärmenge $C(E_1)$ im abgeschlossenen (y_1, y_2) integrierbar (L) ist. Da überdies auf $C(E_1)$ bei jedem n:

$$|f(\xi_1, y)\cdot h_1 + \ldots + f(\xi_n, y)\cdot h_n| \leqq (x_2 - x_1)\cdot \text{obere Grenze aller } |f(x, y)|$$

ist, so ist die Funktion $F(y) = \int_{x_1}^{x_2} (R)\, f(x, y)\, dx$ über $C(E_1)$ integrierbar (L). Sie wird es auch sein über das Intervall (y_1, y_2), wenn man ihr willkürliche Werte gibt in den Punkten von $E_1(y)$.

Weiter ist nach einem Satze von Lebesgue:

$$(1^*) \qquad \int_{C(E_1)} (L)\, dy \int_{x_1}^{x_2} (R)\, f(x, y)\, dx = \lim_{n=\infty} \int_{C(E_1)} (L)\, [f(\xi_1, y)\cdot h_1 + \ldots + f(\xi_n, y)\cdot h_n]\, dy$$
$$= \lim_{n=\infty} [h_1 \cdot \int_{C(E_1)} (L)\, f(\xi_1, y)\, dy + \ldots + h_n \cdot \int_{C(E_1)} (L)\, f(\xi_n, y)\, dy].$$

Wenn $E_2(x)$ leer ist, sind die Punkte ξ_k *ganz willkürlich* in den zugehörigen Intervallen zu wählen. Also existiert über (x_1, x_2) das Integral (R) von $\int_{C(E_1)} (L)\, f(x, y)\, dy \equiv \int_{y_1}^{y_2} (L)\, f(x, y)\, dy$ und obige Gleichung läßt sich in die Form (1) schreiben.

Wir brauchen also nur noch den Fall zu betrachten, daß $E_2(x)$ nicht leer ist. Erstens läßt sich dann zeigen, daß man immer Funktionswerte auf $E_2(x)$ angeben kann, welche $\int_{y_1}^{y_2} (L)\, f(x, y)\, dy$ erweitern zu einer über (x_1, x_2) (R)-integrierbaren Funktion $G(x)$. Dazu genügt es z. B. in jedem

Punkte X von $E_2(x)$ einen Funktionswert $G(X)$ anzunehmen, welcher zwischen dem oberen und unteren Limes von $\int_{y_1}^{y_2}(L) f(x,y)\,dy$ auf $C(E_2)$ im Punkte X liegt. Dann folgt aus (1^*) unmittelbar, *wie auch ξ_k im zugehörigen Intervall gewählt wird*, daß:

$$\int_{C(E_1)}(L)\,dy \int_{x_1}^{x_2}(R) f(x,y)\,dx = \lim_{n=\infty}[h_1 \cdot G(\xi_1) + \ldots + h_n \cdot G(\xi_n)]$$

ist. Also ist $G(x)$ über (x_1, x_2) integrierbar (R).

Zweitens folgt aus (1^*), daß, wie auch die auf $E_2(x)$ gewählten Funktionswerte sind, welche $G(x)$ integrierbar (R) machen, die iterierten Integrale immer einander gleich sind. Denn (1) und (1^*) sind dann identisch.

Erstes Korollar (Satz von Lichtenstein). *Es sei $f(x,y)$ im abgeschlossenen Rechteck $[x_1 \leqq x \leqq x_2;\ y_1 \leqq y \leqq y_2]$ beschränkt. Dann folgt aus der Existenz der beiden einfachen Riemannschen Integrale $\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$ für „jedes" y und $\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy$ für „jedes" x die Existenz und Gleichheit der beiden iterierten Riemannschen Integrale*[3]).

Denn Anwendung des Satzes liefert die Existenz von

$$\int_{x_1}^{x_2}(R)\,dx \int_{y_1}^{y_2}(L) f(x,y)\,dy \equiv \int_{x_1}^{x_2}(R)\,dx \int_{y_1}^{y_2}(R) f(x,y)\,dy.$$

Wendet man darauf denselben Satz an bei Vertauschung von x und y, so folgt die Existenz von

$$\int_{y_1}^{y_2}(R)\,dy \int_{x_1}^{x_2}(L) f(x,y)\,dx \equiv \int_{y_1}^{y_2}(R)\,dy \int_{x_1}^{x_2}(R) f(x,y)\,dx$$

und ihre Gleichheit mit dem vorigen iterierten Integrale.

Zweites Korollar (Satz von Gillespie). *Es sei $f(x,y)$ im abgeschlossenen Rechteck $[x_1 \leqq x \leqq x_2;\ y_1 \leqq y \leqq y_2]$ beschränkt. Existieren dann die beiden iterierten Riemannschen Integrale:*

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx,$$

so sind sie einander gleich[4]).

---

[3]) Siehe Lichtenstein, Gött. Nachr. (1910), S. 468–475.

[4]) Siehe Gillespie, Ann. of math. (2) **20** (1919), S. 224–228. Ein dritter Beweis findet sich bei Ridder, Nieuw Archief (Amsterdam) (2) **14**, 2 (1923), S. 119–121.

Aus der Existenz der iterierten Integrale (R) folgt, daß fast überall in (x_1, x_2) $\int_{y_1}^{y_2}(R) f(x,y)\,dy$ existiert und daß auch fast überall in (y_1, y_2) $\int_{x_1}^{x_2}(R) f(x,y)\,dx$ existiert. Nehmen wir auf der Menge $E_2(x)$, in deren Punkten das erstgenannte einfache Integral nicht existiert, die Funktion $G(x) = \int_{y_1}^{y_2}(R) f(x,y)\,dy$ an, so ist $G(x)$ über (x_1, x_2) integrierbar (R) und daraus folgt durch Anwendung des Satzes:

$$\int_{y_1}^{y_2}(L)\,dy \int_{x_1}^{x_2}(R) f(x,y)\,dx = \int_{x_1}^{x_2}(R)\,dx \int_{y_1}^{y_2}(R) f(x,y)\,dy.$$

§ 2.

Eine weitere Anwendung des vorherigen Satzes führt zu der folgenden Verallgemeinerung eines Satzes von Lichtenstein[5]) in der Theorie der komplexen Funktionen:

$f(z) \equiv u(x,y) + iv(x,y)$ genüge im (beschränkten) Gebiete G der Ebene den folgenden Bedingungen:

1. *$f(z)$ ist beschränkt in jedem abgeschlossenen Bereiche B in G;*

2. *$u(x,y)$ und $v(x,y)$ sind Ableitungen auf jeder in G liegenden, abgeschlossenen Strecke, welche der y-Achse parallel läuft*[6]);

[5]) Siehe Lichtenstein, Sitzungsber. Berliner Math. Ges. (1910), S. 84—100. Der betreffende Satz lautet in seiner ursprünglichen Form: „Es sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine in einem einfach zusammenhängenden Gebiete T_0 beschränkte, sowohl in bezug auf x als y im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion. Ist in allen Punkten von T_0:

$$f(z) = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x,y}^{x+h,y} f(z)\,dx = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \int_{x,y}^{x,y+h} f(z)\,dy,$$

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)] = 0, \qquad h > 0,$$

und bleibt der Ausdruck $\frac{1}{h}[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]$ für alle Wertepaare (x,y) in T_0 und alle $h > 0$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke, so ist $f(z)$ im Innern von T_0 regulär analytisch. — Hierbei wird $\delta_x f(z) = f(x+h+iy) - f(x+iy)$ und $\delta_y f(z) = f\{x+i(y+h)\} - f(x+iy)$ genommen."

[6]) $u(x,y)$ und $v(x,y)$ sind unter Beibehaltung von 1. Ableitungen nach x und nach y auf jeder abgeschlossenen Strecke in G parallel der x- bzw. y-Achse, *wenn $u(x,y)$ und $v(x,y)$ in G approximativ stetig sind als Funktionen einer jeden einzelnen Variablen.* Dies folgt durch Anwendung des Satzes: „Eine in (a,b) approximativ stetige, beschränkte Funktion $f(x)$ ist in allen Punkten von (a,b) die Ableitung ihres unbestimmten Integrals" (siehe Denjoy, Bulletin Soc. Math. 1915, S. 172 u. 173).

3. *$u(x, y)$ und $v(x, y)$ sind auf jeder in G liegenden, parallel der x-Achse laufenden, abgeschlossenen Strecke Ableitungen und daneben integrierbar (R), ausgenommen für diejenigen Strecken, welche einen y-Wert aus einer Menge $K(y)$ vom (linearen) Maße Null haben*[6]);

4. *es existiert eine nach Null konvergierende Folge von reellen Zahlen h_n mit den beiden Eigenschaften:*

α) „mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge E" hat jeder Punkt von G eine bestimmte Umgebung folgender Art:

$$\frac{1}{h_n}[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]$$

$$= \frac{1}{h_n}[i\,\{f(x + h_n + iy) - f(x + iy)\} - \{f(x + iy + ih_n) - f(x + iy)\}]$$

ist dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke für alle Wertepaare (x, y) aus dieser Umgebung „jedoch bei Vernachlässigung einer Menge vom Maße Null" und alle diejenigen h_n aus der Folge, für die $(x + h_n, y)$ und $(x, y + h_n)$ auch in dieser Umgebung liegen;

β) fast überall in G ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{h_n}[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)] = 0. \tag{2}$$

Dann ist $f(z)$ analytisch regulär in G.

Beweis. Es sei J ein in G liegendes abgeschlossenes Rechteck $[x_1 \leqq x \leqq x_2;\ y_1 \leqq y \leqq y_2]$, das keinen Punkt von E (siehe 4., α) enthält.

Es sei weiter $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ die nach Null konvergierende Folge von reellen Zahlen. Dann bilden (nach 3.) diejenigen Punkte y des Intervalls (y_1, y_2), für die *keiner* der Werte: $y, y + h_1, \ldots, y + h_n, \ldots$ zu der Menge $K(y)$ gehören, einen maßgleichen Kern $M(y)$ dieses Intervalls.

Für jeden Wert y aus einem maßgleichen Kerne $N(y)$ desselben Intervalls bilden (nach 4., β) die Punkte der zugehörigen Strecke $[(x_1, y);\ (x_2, y)]$, in denen

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{h_n}[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)] \neq 0$$

ist, eine Menge vom (linearen) Maße Null.

Nach 4., α sind die Ausdrücke:

$$\frac{1}{h_n}[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)] \tag{3}$$

gleichmäßig beschränkt für jedes n oberhalb einer festen Schranke ν und für jedes (x, y) von J „bei Vernachlässigung einer Menge vom Maße Null". Dies folgt unmittelbar durch Anwendung des bekannten Borelschen Lemmas.

Der Durchschnitt $(M.\ N)$ enthält einen maßgleichen Kern $Q(y)$ von folgender Eigenschaft. Zu jedem Werte y von $Q(y)$ enthält die Strecke $[(x_1, y); (x_2, y)]$ einen maßgleichen Kern $L_y(x)$, so daß (3) gleichmäßig beschränkt ist für alle $n > \nu$, für alle y aus $Q(y)$ und alle zugehörigen $L_y(x)$ und so daß auf jedem $L_y(x)$ (2) gilt. Daraus folgt nach dem Satze von Lebesgue für jedes y von $Q(y)$:

$$(4)\quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{h_n} \int_{x_1}^{x_2} (R)\,[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\,dx = \lim_{n=\infty} \int_{L_y(x)} (L)\,\frac{1}{h_n}\,[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\,dx$$

$$= \int_{L_y(x)} (L) \lim_{n=\infty} \frac{1}{h_n}\,[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\,dx = 0.$$

Anwendung des Satzes von § 1 liefert bei genügend großem n:

$$(5)\quad \frac{1}{h_n} \int_{x_1}^{x_2} (R)\,dx \int_{y_1}^{y_2} (L)\,[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\,dy$$

$$= \frac{1}{h_n} \int_{Q(y)} (L)\,dy \int_{x_1}^{x_2} (R)\,[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\,dx.$$

Auf $Q(y)$ ist

$$\frac{1}{h_n} \int_{x_1}^{x_2} (R)\,[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\,dx \equiv \frac{1}{h_n} \int_{L_y(x)} (L)\,[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)]\,dx$$

gleichmäßig beschränkt für alle $n > \nu$. Daraus und aus (4) und (5) folgt nach dem Satze von Lebesgue:

$$(6)\quad \lim_{n=\infty} \frac{1}{h_n} \int_{x_1}^{x_2} (R)\,dx \int_{y_1}^{y_2} (L)\,[\ ]\,dy = \lim_{n=\infty} \frac{1}{h_n} \int_{Q(y)} (L)\,dy \int_{x_1}^{x_2} (R)\,[\ ]\,dx$$

$$= \int_{Q(y)} (L)\,dy \cdot \lim_{n=\infty} \frac{1}{h_n} \int_{x_1}^{x_2} (R)\,[\ ]\,dx = 0.$$

Für jedes genügend große n ist nach dem Satze von § 1:

$$\frac{1}{h_n} \int_{x_1}^{x_2} (R)\,dx \int_{y_1}^{y_2} (L)\,i\,\delta_x f(z)\,dy = \frac{1}{h_n} \int_{Q(y)} (L)\,dy \int_{x_1}^{x_2} (R)\,i\,\delta_x f(z)\,dx$$

$$= \frac{i}{h_n} \int_{Q(y)} (L)\,dy \int_{x_2}^{x_2+h_n} (R)\,f(z)\,dx - \frac{i}{h_n} \int_{Q(y)} (L)\,dy \int_{x_1}^{x_1+h_n} (R)\,f(z)\,dx.$$

Für alle n oberhalb einer gewissen Schranke μ und alle y aus $Q(y)$ sind nach 1.:

$$\frac{1}{h_n}\int_{x_2}^{x_2+h_n}(R)\,f(z)\,dx \quad \text{und} \quad \frac{1}{h_n}\int_{x_1}^{x_1+h_n}(R)\,f(z)\,dx$$

gleichmäßig beschränkt. Daraus und aus 2. folgt:

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{h_n}\int_{Q(y)}(L)\,dy\int_{x_2}^{x_2+h_n}(R)\,f(z)\,dx$$

$$=\int_{Q(y)}(L)\,dy\cdot\lim_{n=\infty}\frac{1}{h_n}\int_{x_2}^{x_2+h_n}(R)\,f(z)\,dx=\int_{(x_2,y_1)}^{(x_2,y_2)}(L)\,f(z)\,dy\ ^{7})$$

und

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{h_n}\int_{Q(y)}(L)\,dy\int_{x_1}^{x_1+h_n}(R)\,f(z)\,dx=\int_{(x_1,y_1)}^{(x_1,y_2)}(L)\,f(z)\,dy\ ^{7}).$$

Somit ist:

$$(7)\quad \lim_{n=\infty}\frac{1}{h_n}\int_{x_1}^{x_2}(R)\,dx\int_{y_1}^{y_2}(L)\,i\,\delta_x f(z)\,dy=i\int_{(x_2,y_1)}^{(x_2,y_2)}(L)\,f(z)\,dy-i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_1,y_2)}(L)\,f(z)\,dy.$$

Auf analoge Weise läßt sich beweisen[7]):

$$(8)\quad \lim_{n=\infty}\frac{1}{h_n}\int_{x_1}^{x_2}(R)\,dx\int_{y_1}^{y_2}(L)\,\delta_y f(z)\,dy=\int_{(x_1,y_2)}^{(x_2,y_2)}(L)\,f(z)\,dx-\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_1)}(L)\,f(z)\,dx.$$

Es zeigt sich hier, daß $f(z)$ in einem abgeschlossenen Bereiche in G für *jedes* y integrierbar (L) ist nach x.

Aus (6), (7) und (8) folgt:

$$(9)\qquad \Phi(J)\equiv\int_J(L)\,f(z)\,dz=0.$$

In jedem willkürlichen abgeschlossenen Bereiche B in G bilden die Punkte von E eine abzählbare und abgeschlossene, daher reduzible Menge $(E\cdot B)$.

---

[7]) Hier wird der folgende Satz angewandt: „Wenn im abgeschlossenen Intervall (a, b) eine der vier Derivierten, $g(x)$ einer stetigen Funktion $\varphi(x)$ beschränkt und integrierbar (R) ist, so ist:

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\int_a^x(R)\,g(x)\,dx.$$

Wird keine Integrierbarkeit (R) angenommen, so wird jedenfalls noch:

$$\varphi(x)-\varphi(a)=\int_a^x(L)\,g(x)\,dx$$

sein." — Siehe z. B. Hobson, Theory of functions I, §§ 346 und 411.

Es sei P ein isolierter Punkt von $(E \cdot B)$ im Innern von B und das offene Intervall (-achsenparallele Rechteck) U sei eine ganz in B liegende Umgebung von P, welche keine weiteren Punkte von $(E \cdot B)$ enthält. Zu jedem willkürlich positiven ε existiert nach 1. ein offenes Intervall J, das P enthält und derartig, daß für jedes (offene oder abgeschlossene) in J liegende und P enthaltende Intervall J_1: $|\Phi(J_1)| \equiv |\int_{J_1} (L) f(z)\, dz| < \varepsilon$ ist. Da Φ eine beschränkt additive Intervallfunktion ist und nach (9) $\Phi = 0$ ist in jedem abgeschlossenen Intervall aus U, das P nicht enthält, wird für jedes in U liegende abgeschlossene Intervall: $|\Phi| < \varepsilon$ sein. Da ε willkürlich ist, muß in U: $\Phi \equiv 0$ sein.

Auf analoge Weise zeigt man, daß für die isolierten Punkte der ersten und der weiteren Ableitungen von $(E \cdot B)$, welche im Innern von B liegen, Umgebungen existieren, in denen $\Phi \equiv 0$ ist. Da $(E \cdot B)$ reduzibel ist, wird somit $\Phi \equiv 0$ sein im offenen Bereiche B, also auch in G.

Betrachten wir ein willkürliches abgeschlossenes Intervall $J[a \leqq x \leqq b;\ c \leqq y \leqq d]$ in G. Dann ist für jeden Punkt (X, Y) von J:

$$\int_a^X f(x + ic)\, dx + \int_c^Y f(X + iy)\, d(iy) = \int_c^Y f(a + iy)\, d(iy) + \int_a^X f(x + iY)\, dx.$$

Auf diese Weise wird in J eine eindeutige, stetige Funktion $F(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ definiert und nach 2. und 3. hat man fast überall in J gleichzeitig:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x + iy) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial (iy)} = f(x + iy),$$

also auch:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Da außerdem alle oberen und unteren Derivierten von p und q nach x und nach y in J gleichmäßig beschränkt sind, ist nach einem Pompéiu-Montelschen Satze[8]) $F(z)$ im Innern von J analytisch regulär. Dasselbe gilt also auch von $F'(z) \equiv \frac{\partial F}{\partial (iy)} \equiv f(z)$[9]).

[8]) Siehe Pompéiu, Sur la continuité des fonctions de variable complexe, Thèse, Paris 1905, Chap. V, und Montel, Ann. École Norm. (3) **24** (1907), S. 283–295.

[9]) Weitere Gruppen von hinreichenden Bedingungen für die Analytizität komplexer Funktionen wird man finden in einer in den Math. Annalen **102** (1929) erschienenen Mitteilung. Diese Gruppen enthalten jedoch alle als eine der Bedingungen die *flächenhafte Meßbarkeit* des reellen und imaginären Teiles der Funktion im Gegensatz zum hier abgeleiteten Resultate.

(Eingegangen am 27. April 1929.)

Zum Waringschen Problem.

Zweite Abhandlung.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Das Hauptergebnis meiner ersten Abhandlung unter gleichem Titel[1]) war die Ungleichung (8) des Satzes IV. Diese Ungleichung bewies ich ausnahmslos für $s \geqq k K + 1$ und im Falle der Richtigkeit von

$$r_2(n) = O(n^\varepsilon) \quad \text{bei jedem} \quad \varepsilon > 0 \tag{1}$$

sogar für $s \geqq (k-2) K + 5$.

Heute werde ich sie ausnahmslos für $s \geqq (k-2) K + 5$ beweisen; die Abänderung des Beweisganges ist sogar für den Hardy-Littlewoodschen Spezialfall $P(z) = z^k$ von Nutzen[2]).

Ich bin aber keineswegs in der Lage, (1) zu beweisen; vielmehr wurde (1) nur einmal, nämlich zum Beweise von

$$W(m) < D_9 m^{2a+\varepsilon} \quad \text{für} \quad m \geqq 1 \tag{2}$$

gebraucht[3]), und (2) läßt sich direkt folgendermaßen begründen[4]).

Hierbei war $k > 2$, $a = \frac{1}{k}$, $P(z)$ ein ganzzahliges Polynom[5]) $\alpha_0 z^k + \ldots + \alpha_k$ mit $\alpha_0 > 0$, $r_2(n)$ die Lösungszahl der diophantischen Gleichung

$$P(h_1) + P(h_2) = n, \quad h_1 \geqq 0, \; h_2 \geqq 0;$$

$$W(m) = \sum_{n=0}^{m} r_2^2(n).$$

---

[1]) Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 219—247.

[2]) Es wird der bekannte Satz entbehrlich, daß die Anzahl der Zerlegungen von $n > 0$ in zwei Quadrate höchstens das Vierfache der Anzahl $T(n)$ der positiven Teiler von n ist.

[3]) Loc. cit. S. 241.

[4]) Der Witz ist, daß $P(u) + P(v)$ nicht notwendig reduzibel ist (nicht einmal im Körper aller Zahlen), wohl aber $P(u) - P(v)$ wegen des Faktors $u - v$.

[5]) Ich mache keinen Gebrauch von der alten Annahme, daß $P(z)$ für $z \geqq 0$ beständig wächst und $\geqq 0$ ist.

Aus

$$P(u)+P(v)\leqq m, \qquad u\geqq 0,\ v\geqq 0,\ m\geqq 1$$

folgt offenbar

$$u\leqq D\,m^a, \qquad v\leqq D\,m^a,$$

wo $D=D_{24}$.

Ich beweise nunmehr (2) folgendermaßen.

$$W(m)=\sum_{\substack{h_1,h_2,h_3,h_4=0\\ 0\leqq P(h_1)+P(h_2)=P(h_3)+P(h_4)\leqq m}}^{[Dm^a]} 1\leqq \sum_{h_2,h_4=0}^{[Dm^a]}\ \sum_{\substack{h_1,h_3=0\\ P(h_1)-P(h_3)=P(h_4)-P(h_2)}}^{[Dm^a]} 1.$$

Bei gegebenen h_2, h_4 mit

$$n=P(h_4)-P(h_2)\neq 0$$

hat, wenn $T(l)$ die Anzahl der positiven Teiler von $l>0$ ist,

$$P(h_1)-P(h_3)=n \tag{3}$$

höchstens $2(k-1)\,T(|n|)$ Lösungen; denn es ist

$$P(x+y)-P(x)=y(k\alpha_0 x^{k-1}+\ldots),$$

wo die Klammer rechts bei festem y den wahren Grad $k-1$ in x hat; es muß also $h_1-h_3 | n$ sein, und bei festem h_1-h_3 hat h_3 höchstens $k-1$ Werte.

$n\neq 0$ kommt für höchstens $D_{25}\,m^{2a}$ Paare h_2, h_4 mit $0\leqq h_2\leqq D\,m^a$, $0\leqq h_4\leqq D\,m^a$ vor, und wegen $|n|<D_{26}\,m$ ist die Lösungszahl von (3) jedesmal $<D_{27}\,m^{\varepsilon}$.

Für jedes der höchstens $D_{28}\,m^a$ Paare h_2, h_4 mit $0\leqq h_2\leqq D\,m^a$, $0\leqq h_4\leqq D\,m^a$, $P(h_4)-P(h_2)=0$ hat (3), jetzt mit $n=0$, höchstens $D_{29}\,m^a$ Lösungen mit $0\leqq h_1\leqq D\,m^a$.

Daher ist

$$W(m)<D_{25}\,m^{2a}\,D_{27}\,m^{\varepsilon}+D_{28}\,m^a\,D_{29}\,m^a<D_9\,m^{2a+\varepsilon}.$$

Göttingen, den 8. Juni 1929.

(Eingegangen am 9. Juni 1929.)

Expressions for the Euler numbers obtained by expanding sec x by means of Maclaurins Theorem.

By

I. J. Schwatt in Philadelphia.

1. The author has been unable to find in the literature the general term of the expansion of sec x by Maclaurins theorem, that is the value of $\frac{d^n}{dx^n} \sec x]_{x=0} = E_n$, as a rational expression involving finite operations [1]).

In the following several methods for expandig sec x by Maclaurins theorem will be given, which correspondingly will render expressions for the Euler numbers.

2. If

$$y = \sec x,$$

then

$$y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^n}{dx^n} y]_{x=0} \frac{x^n}{n!}. \tag{1}$$

---

[1]) Stern, Crelles Journal **79**, pp. 67—98 finds by actual differentiation the higher derivatives of $F(x) = \sec h\, x$, in terms of

$$A = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad Z = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 \text{ and } B = \frac{2Z}{e^x - e^{-x}},$$

up to

$$F^7(x) = B(1385 - 7266\, Z + 10920\, Z^2 - 5040\, Z^3),$$

and

$$F^{(8)}(x) = A(1385 - 24568\, Z + 83664\, Z^2 - 100800\, Z^3 + 40320\, Z^4),$$

but does not give a form for the general higher derivative. The expansion of sec x is usually obtained in the following form

$$\sec x \quad 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)^{2n+1}} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad -\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi.$$

See: Schlömilch, Compendium der höheren Analysis **1**, p. 241; Chrystal, Text Book of Algebra **2**, p. 341; Edwards, Differential Calculus, p. 502; Shovelton, Quarterly Journal of Mathematics **46**, pp. 220—247, finds the expansion by means of the Method of Finite Differences.

Now

$$(2)\quad \frac{d^n}{dx^n}\,y=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)^{\alpha}\binom{k}{\alpha}u^{k-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\,u^{\alpha}\frac{d^k}{du^k}\,y\,,^{2})$$

where $u=\cos x$.

We then have

$$(3)\quad \frac{d^n}{dx^n}\,y=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{k}(-1)\ \binom{k}{\alpha}\sec^{\alpha+1}x\,\frac{d^n}{dx^n}\cos^{\alpha}x\,,$$

which by means of the principle

$$(4)\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{k}A_{k,\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{k=\alpha}^{n}A_{k,\alpha},$$

changes to

$$(5)\quad \frac{d^n}{dx^n}\,y=\sum_{\alpha=1}^{n}(-1)^{\alpha}\sec^{\alpha+1}x\,\frac{d^n}{dx^n}\cos^{\alpha}x\sum_{k=\alpha}^{n}\binom{k}{\alpha}.$$

But

$$(6)\quad \sum_{k=\alpha}^{n}\binom{k}{\alpha}=((t^{\alpha}))\sum_{k=\alpha}^{n}(1+t)^{k}\ ^{3})\ =((t^{\alpha+1}))\,[(1+t)^{n+1}-(1+t)^{\alpha}]$$

$$(7)\quad =\binom{n+1}{\alpha+1}.$$

Therefore from (5)

$$(8)\quad \frac{d^n}{dx^n}\,y=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n+1}{k+1}\sec^{k+1}x\,\frac{d^n}{dx^n}\cos^{k}x.$$

Now

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos^{k}x=\frac{1}{2^k}\frac{d^n}{dx^n}(e^{ix}+e^{-ix})^{k},$$

$$=\frac{1}{2^k}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{\alpha=0}^{k}\binom{k}{\alpha}e^{(k-2\alpha)ix}$$

$$(9)\quad =\frac{i^n}{2^k}\sum_{\alpha=0}^{k}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{n}e^{(k-2\alpha)ix}.$$

Applying (9) to (8) we obtain

$$(10)\quad \frac{d^n}{dx^n}\,y]_{x=0}=i^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}\binom{n+1}{k+1}\sum_{\alpha=0}^{k}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{n},$$

and since the first member of (10) is real, n must be even.

---

[2]) Authors book: An Introduction to the Operations with series. Press of the University of Pensylvania, Ch. I (83).

[3]) $((t^{\alpha}))\,F(t)$ denotes the coefficient of t^{α} in $F(t)$.

Hence,

$$(11)\qquad \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}y\Big]_{x=0} = (-1)^n \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{2^k}\binom{2n+1}{k+1} \sum_{\alpha=0}^{k}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{2n}.$$

To reduce (11) we shall show that

$$(12)\qquad S = \sum_{\alpha=0}^{k}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{2n} = 2\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{2n},$$

where $\left[\frac{k-1}{2}\right]$ is the largest integer contained in $\frac{k-1}{2}$.

For, if k is even, we may write

$$S = \sum_{\alpha=0}^{\frac{k}{2}-1}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{2n} + \sum_{\alpha=\frac{k}{2}+1}^{k}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{2n}.$$

Letting in the second summation of the second member $k-\alpha=\alpha'$, then

$$S = 2\sum_{\alpha=0}^{\frac{k-2}{2}}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{2n}.$$

If k is odd, the upper limit of α in S is $\frac{k-1}{2}$.

We therefore obtain

$$(13)\quad \sec x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\binom{2n+1}{k+1}\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{2n},$$

from which, by definition

$$(14)\qquad E_n = (-1)^n\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{2^{k-1}}\binom{2n+1}{k+1}\sum_{\alpha=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\binom{k}{\alpha}(k-2\alpha)^{2n}.$$

3. Another form of the Euler number is arrived at in the following manner.

From $y=\sec x$, we have

$$(15)\qquad \frac{d^n}{dx^n}y = 2\frac{d^n}{dx^n}\frac{e^{ix}}{e^{2ix}+1}.$$

Then by Leibnitz's theorem

$$(16)\qquad \frac{d^n}{dx^n}y = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}e^{ix}\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{e^{2ix}+1}.$$

Now

$$\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\, e^{ix} = i^{n-k}\, e^{ix} \tag{17}$$

and by (2),

$$\frac{d^k}{dx^k}\,\frac{1}{e^{2ix}+1} = \frac{(2i)^k}{e^{2ix}+1}\sum_{\alpha=0}^{k}\frac{e^{2i\alpha x}}{(e^{2ix}+1)^{\alpha}}\sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^{\beta}\binom{\alpha}{\beta}\beta^k. \tag{18}$$

Applying (17) and (18) to (16) we obtain

$$\frac{d^n}{dx^n}\, y\Big]_{x=0} = i^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\sum_{\alpha=0}^{k}\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^{\beta}\binom{\alpha}{\beta}\beta^k, \tag{19}$$

and since n must be even, (19) changes to

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\, y\Big]_{x=0} = (-1)^n\sum_{k=0}^{2n}2^k\binom{2n}{k}\beta^k\sum_{\alpha=0}^{k}\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^{\beta}\binom{\alpha}{\beta},$$

$$= (-1)^n\sum_{\alpha=0}^{2n}\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^{\beta}\binom{\alpha}{\beta}\sum_{k=\alpha}^{2n}\binom{2n}{k}2\beta)^k, \tag{20}$$

by (4).

But

$$S = \sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^{\beta}\binom{\alpha}{\beta}\beta^k = 0, \quad \text{if } k<\alpha, \tag{21}$$

[5])

the lower limit of k in (20) is therefore zero, and

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\, y\Big]_{x=0} = (-1)^n\sum_{\alpha=0}^{2n}\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^{\beta}\binom{\alpha}{\beta}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(2\beta)^k, \tag{22}$$

$$= (-1)^n\sum_{\alpha=0}^{2n}\frac{1}{2^{\alpha}}\sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^{\beta}\binom{\alpha}{\beta}(1+2\beta)^{2n}, \tag{23}$$

which is another form for E_n.

4. An additional expression for E_n is obtained as follows. If again

$$y = \sec x,$$

[5]) From

$$(1-e^x)^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^{\beta}\binom{\alpha}{\beta}e^{\beta x} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\sum_{\beta=0}^{\alpha}(-1)^{\beta}\binom{\alpha}{\beta}\beta^k, \tag{b}$$

follows that $S = k!\,((x^k))\,(1-e^x)^{\alpha}$.

Now

$$(1-e^x)^{\alpha} = (-1)\;\; x^{\alpha}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\dots\right)^{\alpha},$$

and since x^{α} is the lowest power in (b), therefore $S=0$, if $k<\alpha$.

ve have

$$24) \qquad \frac{d^n}{dx^n} y\Big]_{x=0} = \frac{d^n}{dx^n} \frac{2}{e^{ix}+e^{-ix}}\Big]_{x=0} = i^n \frac{d^n}{dx^n} \frac{2}{e^x+e^{-x}}\Big]_{x=0}.$$

letting

$$e^x = u \quad \text{and} \quad \frac{2}{e^x+e^{-x}} = v,$$

hen

$$25) \qquad \frac{d^n}{dx^n} v = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^\alpha \binom{k}{\alpha} u^{k-\alpha} \frac{d^n}{dx^n} u^\alpha \frac{d^k}{du^k} \left(\frac{1}{u+i} + \frac{1}{u-i}\right),$$

$$26) \qquad = \sum_{k=0}^{n} \frac{(u+i)^{k+1}+(u-i)^{k+1}}{(u^2+1)^{k+1}} u^k \sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^\alpha \binom{k}{\alpha} \alpha^n,$$

nd

$$27) \qquad \frac{d^n}{dx^n} v\Big]_{x=0} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1+i)^{k+1}+(1-i)^{k+1}}{2^{k+1}} \sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^\alpha \binom{k}{\alpha} \alpha^n.$$

Now

$$28) \qquad (1+i)^{k+1} = 2^{\frac{k+1}{2}} \left(\cos \frac{k+1}{4}\pi + i \sin \frac{k+1}{4}\pi\right),$$

pplying (28) to (27) and the result to (24) gives

$$29) \qquad \frac{d^n}{dx^n} y\Big]_{x=0} = i^n \sqrt{2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \cos(k+1)\frac{\pi}{4} \sum_{\alpha=0}^{k} (-1)^\alpha \binom{k}{\alpha} \alpha^n,$$

n which n must be even. Writing in (29) 2^n in place of n a new form or E_n is obtained.

5. A method is given here by which the expansion of $\sec x$ is derived without the use of Calculus.

We have

$$30) \qquad \sec x = \frac{1}{(1-\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \sin^{2k} x.$$

ut

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \binom{2k}{k},$$

ence

$$31) \qquad \sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \sin^{2k} x.$$

Now

$$\sin^{2k}x = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}(e^{ix} - e^{-ix})^{2k}, \tag{32}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sum_{\alpha=0}^{2k} (-1)^\alpha \binom{2k}{\alpha} e^{(2k-2\alpha)ix},$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sum_{n=0}^{\infty} i^n 2^n \frac{x^n}{n!} \sum_{\alpha=0}^{2k} (-1)^\alpha \binom{2k}{\alpha} (k-\alpha)^n, \tag{33}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{\alpha=0}^{2k} (-1)^\alpha \binom{2k}{\alpha} (k-\alpha)^{2n}, \tag{34}$$

since $\sin^{2k}x$ is real.

By (21)

$$S = \sum_{\alpha=0}^{2k} (-1)^\alpha \binom{2k}{\alpha} (k-\alpha)^{2n} = 0, \quad \text{if } n < k, \tag{35}$$

then if $n \geqq k$, S may be reduced as follows.

We may write

$$S = \sum_{\alpha=0}^{k-1} (-1)^\alpha \binom{2k}{\alpha} (k-\alpha)^{2n} + \sum_{\alpha=k}^{2k} (-1)^\alpha \binom{2k}{\alpha} (k-\alpha)^{2n}. \tag{36}$$

Letting in the summations in the second member $k - \alpha = \alpha'$, we find

$$S = 2(-1)^k \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^\alpha \binom{2k}{k-\alpha} \alpha^{2n}, \quad n \geqq k, \tag{37}$$

therefore

$$\sin^{2k}x = \frac{1}{2^{2k-1}} \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^\alpha \binom{2k}{k-\alpha} \alpha^{2n}. \tag{38}$$

Applying (38) to (31) we obtain by means of (4) the expansion of sec x and consequently

$$E_n = (-1)^n 2^{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{4k-1}} \binom{2k}{k} \sum_{\alpha=1}^{k} (-1)^\alpha \binom{2k}{k-\alpha} \alpha^{2n}. \tag{39}$$

6. The following method leads to an additional new form for the Euler number.

We have

$$\sec x = (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \tan^{2k}x, \tag{40}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{d^n}{dx^n} \tan^{2k}x \Big]_{x=0} \frac{x^n}{n!}. \tag{41}$$

Now

42) $$\tan^{2k} x = (-1)^k \left(1 - \frac{2}{e^{2ix}+1}\right)^{2k},$$

and

43) $$\frac{d^n}{dx^n} \tan^{2k} x = (-1)^k \sum_{\alpha=0}^{2k} (-1)^\alpha \binom{2k}{\alpha} 2^\alpha \frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{(e^{2ix}+1)^\alpha}.$$

But

44) $$\frac{d^n}{dx^n} \frac{1}{(e^{2ix}+1)^\alpha} = (2i)^n \sum_{\beta=0}^{n} \binom{\alpha+\beta-1}{\beta} \sum_{\gamma=0}^{\beta} (-1)^\gamma \binom{\beta}{\gamma} \gamma^n \frac{e^{2i\beta x}}{(e^{2ix}+1)^{\alpha+\beta}},$$

by (2), by means of which (43) becomes

45) $$\frac{d^n}{dx^n} \tan^{2k} x]_{x=0}$$

$$= (-1)^k (2i)^n \sum_{\alpha=0}^{2k} (-1)^\alpha \binom{2k}{\alpha} \sum_{\beta=0}^{n} \binom{\alpha+\beta-1}{\beta} \frac{1}{2^\beta} \sum_{\gamma=0}^{\beta} (-1)^\gamma \binom{\beta}{\gamma} \gamma^n.$$

To reduce (45) we shall show that

46) $$\sum_{\alpha=0}^{2k} (-1)^\alpha \binom{2k}{\alpha} \binom{\alpha+\beta-1}{\beta} = \binom{\beta-1}{2k-1}.$$

For

$$\binom{\alpha+\beta-1}{\beta} = \binom{\alpha+\beta-1}{\alpha-1} = (-1)^{\alpha-1} \binom{-\beta-1}{\alpha-1},$$

hence the first member of (46), which we shall denote by S, changes to

47) $$S = -\sum_{\alpha=0}^{2k} \binom{2k}{2k-\alpha} \binom{-\beta-1}{\alpha-1}.$$

But

48) $$S = -\sum_{\alpha=0}^{2k} ((x^{2k-\alpha})) (1+x)^{2k} ((x^{\alpha-1})) (1+x)^{-\beta-1},$$

$$= -\sum_{\alpha=0}^{2k} ((x^{2k-1})) (1+x)^{2k-\beta-1} = -\binom{2k-\beta-1}{2k-1} = \binom{\beta-1}{2k-1}.$$

Applying (46) to (45) and the result to (41), taking note that $\sec x$ is real and that therefore n must be even, we obtain

49) $$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty}{}' (-1)^n 2^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} \sum_{\beta=0}^{2n} \frac{1}{2^\beta} \binom{\beta-1}{2k-1} \sum_{\gamma=0}^{\beta} (-1)^\gamma \binom{\beta}{\gamma} \gamma^{2n}.$$

Now from $\binom{\beta-1}{2k-1}$ follows that $\beta \geqq 2k$, hence $2n \geqq 2k$, and k is the smallest value n may assume in (49). Therefore instead of $\sum_{n=0}^{\infty}{}'$ we may

write $\sum_{n=k}^{\infty}$. Letting in (49) with the changed lower limit for n, $n-k=n'$, we have

$$(50)\quad \sec x = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+k}2^{2(n+k)}\frac{x^{2(n+k)}}{(2n+k)!}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}\sum_{\beta=2k}^{2(n+k)}\frac{1}{2^\beta}\binom{\beta-1}{2k-1}$$
$$\times\sum_{\gamma=0}^{\beta}(-1)^\gamma\binom{\beta}{\gamma}\gamma^{2(n+k)}.$$

Letting $n+k=n'$, then (50) changes to

$$(51)\quad \sec x = \sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}\sum_{\beta=2k}^{2n}\frac{1}{2^\beta}\binom{\beta-1}{2k-1}\sum_{\gamma=0}^{\beta}(-1)^\gamma\binom{\beta}{\gamma}\gamma^{2n},$$

which by means of (4), with due regard to the convergency, we obtain from the expansion of $\sec x$, the expression

$$(52)\quad E_n=(-1)^n 2^{2n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}\sum_{\beta=2k}^{2n}\frac{1}{2^\beta}\binom{\beta-1}{2k-1}\sum_{\gamma=0}^{\beta}(-1)^\gamma\binom{\beta}{\gamma}\gamma^{2n}.$$

University of Pennsylvania, Philadelphia, U. S. A.

(Eingegangen am 13. Mai 1929.)

Über eine Formel des Herrn Schwatt.

Von

Oskar Perron in München.

I. In seiner vorstehenden Note hat Herr Schwatt wiederholt von der Formel

$$\frac{d^n f(u(x))}{dx^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(u(x)) \sum_{\alpha=1}^{k} \binom{k}{\alpha} [-u(x)]^{k-\alpha} \frac{d^n [u(x)^\alpha]}{dx^n}$$

Gebrauch gemacht, für die er in seinem zitierten Buch mehrere Beweise gegeben hat. Die Formel ist eine Verallgemeinerung der „Kettenregel“ und läßt sich noch wesentlich einfacher folgendermaßen beweisen. Der Ausdruck

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n f(u(x))}{dx^n} \tag{1}$$

ist der Koeffizient von h^n in der formalen Taylor-Entwicklung von $f(u(x+h))$ nach Potenzen von h. Nun ist

$$f(v) = f(u) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(u)\,(v-u)^k; \tag{2}$$

daher insbesondere

$$f(u(x+h)) = f(u(x)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(u(x)) [u(x+h) - u(x)]^k. \tag{3}$$

Aber in

$$[u(x+h) - u(x)]^k = [u'(x)\,h + \ldots]^k$$

kommt für $k > n$ die Potenz h^n gar nicht vor, so daß man auf der rechten Seite von (3) nur die Werte $k \leqq n$ zu berücksichtigen braucht. Da aber

$$[u(x+h) - u(x)]^k = [-u(x)]^k + \sum_{\alpha=1}^{k} \binom{k}{\alpha} [-u(x)]^{k-\alpha} [u(x+h)]^\alpha \tag{4}$$

und da der Koeffizient von h^n in der Entwicklung von $[u(x+h)]^\alpha$ gleich

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n [u(x)^\alpha]}{dx^n}$$

ist, so ist der Koeffizient von h^n in der Entwicklung von (4) gleich

$$\sum_{\alpha=1}^{k} \binom{k}{\alpha} [-u(x)]^{k-\alpha} \frac{1}{n!} \frac{d^n[u(x)^\alpha]}{dx^n}$$

und daher in der Entwicklung von (3) gleich

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(u(x)) \sum_{\alpha=1}^{k} \binom{k}{\alpha} [-u(x)]^{k-\alpha} \frac{1}{n!} \frac{d^n[u(x)^\alpha]}{dx^n}.$$

Durch Gleichsetzung der Ausdrücke (1) und (5) entsteht unmittelbar die Schwattsche Formel.

II. Wenn f und u nicht analytisch sind, scheint der Beweis zu versagen, da z. B. (2) nicht gilt. Aber tatsächlich kommt es bei dem ganzen Beweis nur auf die *formale* Taylor-Entwicklung an. Denn die Weiterdifferentiation der Formel

$$\frac{df(u(x))}{dx} = f'(u(x)) \frac{du(x)}{dx}$$

bis zur n-ten Ableitung hin erfolgt immer nach denselben formalen Regeln, auch wenn die höheren als n-ten Ableitungen von f und u gar nicht existieren. Das formelmäßige Endresultat muß also genau so aussehen, wie wenn f und u analytisch wären. Somit gilt die Schwattsche Formel, sobald die n-ten Ableitungen von f und u existieren; stetig brauchen sie nicht zu sein. Man kann übrigens den Beweis auch so führen, daß f und u von Anfang an keiner weiteren Beschränkung unterliegen müssen. An Stelle von (2) ist dann die Taylorsche Formel mit Peanoschem Restglied[1])

$$f(v) = f(u) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(u)(v-u)^k + (v-u)^n \varepsilon(v,u), \qquad \lim_{v \to u} \varepsilon(v,u) = 0$$

zu benutzen, durch welche die n ersten Ableitungen eindeutig bestimmt sind (die n-te braucht nicht stetig zu sein), und in entsprechender Weise muß auch in der Entwicklung von $[u(x+h)]^\alpha$ mit der Potenz h^n abgebrochen werden.

---

[1]) G. Peano, Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor. Mathesis 9 (1889), S. 182f. — Ein einfacher Beweis auch in der Arbeit des Verfassers: Über Maxima und Minima und eine Modifikation des Begriffs der höheren Ableitungen. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-naturw. Abteilung 1926, S. 309—315, speziell S. 311.

(Eingegangen am 13. Mai 1929.)

Hydro- und Aeromechanik

nach Vorlesungen von L. Prandtl. Von Dr. phil. **O. Tietjens.** Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. **L. Prandtl.** In zwei Bänden. Erster Band: **Gleichgewicht und reibungslose Bewegung.** Mit 178 Textabbildungen. VIII, 238 Seiten. 1929. Gebunden RM 15.—

Die von Dr. Tietjens herausgegebenen Vorlesungen des Göttinger Professors Prandtl wurden von diesem im Manuskript durchgesehen und neue Resultate, die nach dem Ausscheiden von Tietjens in die Vorlesungen aufgenommen worden sind, neu hinzugefügt.

Das Buch erscheint aus praktischen Gründen in zwei Teilen, die so abgefaßt sind, daß jeder Teil für sich allein benutzbar ist. Der erste Band enthält die Lehre vom Gleichgewicht der Flüssigkeiten und Gase samt praktischen Anwendungen, und er enthält ferner den Aufbau der Lehre von der strömenden Bewegung einer idealen reibungslosen Flüssigkeit in einer verhältnismäßig strengen Darstellung. Der zweite Band ist vor allem den technischen Anwendungen gewidmet und bevorzugt in seinem überwiegenden Teil Darstellungsweisen, die mehr dem Gedankenkreise des Praktikers angepaßt sind. Der Autor hat sich vor allem bemüht, das Begriffliche deutlich herauszuarbeiten. Die Einzelausführungen, die man auch in anderen Lehrbüchern findet, wurden dabei entweder ganz übergangen oder nur kurz angedeutet. Auch bei der Darstellung der Versuchsergebnisse wurde mehr Wert darauf gelegt, durch wenige typische Beispiele eine zutreffende Anschauung über diese Dinge zu vermitteln, als möglichst viel Einzeltatsachen zu bringen.

Festigkeitslehre

Von **George Fillmore Swain,** LL. D., Professor an der Harvard-Universität, New-York. Autorisierte Übersetzung von Dr.-Ing. **A. Mehmel,** Hannover. Mit 463 Textabbildungen. XVIII, 630 Seiten. 1928. Gebunden RM 34.—

Inhaltsverzeichnis: Betrachtungen über den Wert mathematischer Untersuchungen, des Versuchswesens und des gesunden Menschenverstandes auf dem Gebiete der technischen Mechanik. I. Einführung. II. Die wesentlichen Sätze der Mechanik starrer Körper. III. Einige geometrische Beziehungen. IV. Spannung und Verzerrung. Verhalten des Materials. V. Spannungen und Verzerrungen in den verschiedenen Ebenen an einem Punkt. VI. Zug und Druck im einachsigen Spannungszustand. VII. Schub. VIII. Verdrehung oder Torsion. IX. Die Verteilung einer in einem beliebigen Punkt einer ebenen Fläche angreifenden Normalkraft (Spannungen bleiben dabei unterhalb der Elastizitätsgrenze). X. Die Theorie der Biegung. XI. Querkräfte und Biegungsmomente des Balkens. Einflußlinien. XII. Formänderungen des geraden Balkens bei reiner Biegung. XIII. Zusammengesetzte Beanspruchungen. XIV. Balken über mehr als zwei Stützen. XV. Eisenbetonbalken. XVI. Nietverbindungen. XVII. Druckstäbe. XVIII. Kreisringförmige und kugelförmige Behälter. XIX. Anfangsspannungen in Metallen. XX. Die Biegung gekrümmter Stäbe. XXI. Materialprüfung. XXII. Wiederholte Beanspruchungen. XXIII. Ursachen und Voraussetzungen für den Bruch eines Materials. Sachverzeichnis.

Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen

Herausgegeben von

Professor Dr. **Th. Kármán**

Heft 8:

J. Lennertz: **Beitrag zur theoretischen Behandlung des gegenseitigen Einflusses von Tragfläche und Rumpf**

Mit 11 Abbildungen im Text

M. Hansen: **Die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht an einer eingetauchten Platte**

Mit 24 Abbildungen im Text

Walter Fritsch: **Der Einfluß der Wandrauhigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen**

Mit 25 Abbildungen im Text. II, 62 Seiten. 1928. RM 6.—

VERLAG VON JULIUS SPRINGER IN BERLIN

Bei der Redaktion eingegangene Schriften.

Unter dieser Rubrik veröffentlichen wir fortlaufend ein Verzeichnis derjenigen Schriften, die uns von Verlegern oder Verfassern zu diesem Zwecke übersandt werden. Wir bitten, von dieser Gelegenheit zur Bekanntmachung neuer Schriften ausgiebig Gebrauch machen zu wollen.

Hertz, Heinrich. Erinnerungen, Briefe, Tagebücher. Zusammengestellt von Johanna Hertz. Mit drei Abbildungen, 10 Tafeln und 2 Faksimiles. Gr.-8°, VIII u. 263 S. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig (1929).

L'Enseignement Mathématique. XXVIIIe Année. 1929, Nos 1—2—3. Gr.-8°, 176 S. Paris et Genève, 1929.

Memoirs of the College of Sciences. Kyoto, Imperial University. Series A, Vol. XII, No. 4, S. 203—226. July 1929, Kyoto.

Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. No 4—6 A, Avril—Juin 1929. Gr.-8°, S. 203—315. Cracovie, Imprimerie de l'Université, 1929.

Fundamenta Mathematicae. Tom XIV, Gr.-8°, 349 S., Warszawa 1929. Paris, Gauthier-Villars.

Journal of Mathematics and Physics. Massachusetts Institute of Technology. Vol. VIII, Nr. 2. Gr.-8°, 81—161 S. July 1929.

Studia Mathematica. Redaktorowie St. Banach, H. Steinhaus. Tom I. Gr.-8°, 260 S. Lwów, 1929.

Research studies of the State College of Washington. Vol. I, Nr. 1. Gr.-8°, 64 S. Pullman, Washington, 1929.

Bjerknes, V., Über die hydrodynamischen Gleichungen in Lagrangescher und Eulerscher Form und ihre Linearisierung für das Studium kleiner Störungen. (Geofysiske Publ. Vol. V, Nr. 11.) Gr.-4°, 43 S. Oslo, Norske Videnskaps-Akademi, i Kommisjon hos Cammermeyers Boghandel, 1929.

Research Studies of the State College of Washington. Vol. I., Nr. 2. Gr.-8°, 65—112 S. Pullman, Washington, 1929.

Hopmann, J., Die experimentelle Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie. Gr.-8°. 683—709 S. Nicht im Handel. (Sonderabdruck aus dem Handbuch der Physik, Bd. XXI.)

Debye, P., Polare Molekeln. Gr.-8°, VIII u. 200 S. Leipzig, S. Hirzel, 1929.

Rocznik Polskiej Akademji Umiejętności. Rok 1927—1928. 8°, LX u. 136 S. w Krakowie, Nakładem Polskiej Akademji Umiejętności, 1929.

Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Classe des Sciences math. et nat. Série A. No. 1A, 2A, 3A, 1929. Gr.-8°, 1—148 S. Cracovie, Imprimerie de l'Université, 1929.

Abstracts of scientific and technical publications from the Massachusetts Institute of Technology. Nr. 4. Gr.-8°, 75 S. The Technology Press, Cambridge Mass., 1929.

Mangold, Sister M. C., The loci described by the vertices of singly infinite systems of triangles circumscribed about a fixed conic. (Diss. Cathol. Univ. of Amer.) Gr.-8°, 49 S. Washington, 1929.

Hierzu zwei Beilagen und der Katalog „Mathematik" vom Verlag Julius Springer in Berlin und Wien.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.